

# FORMATION SPC – MSP

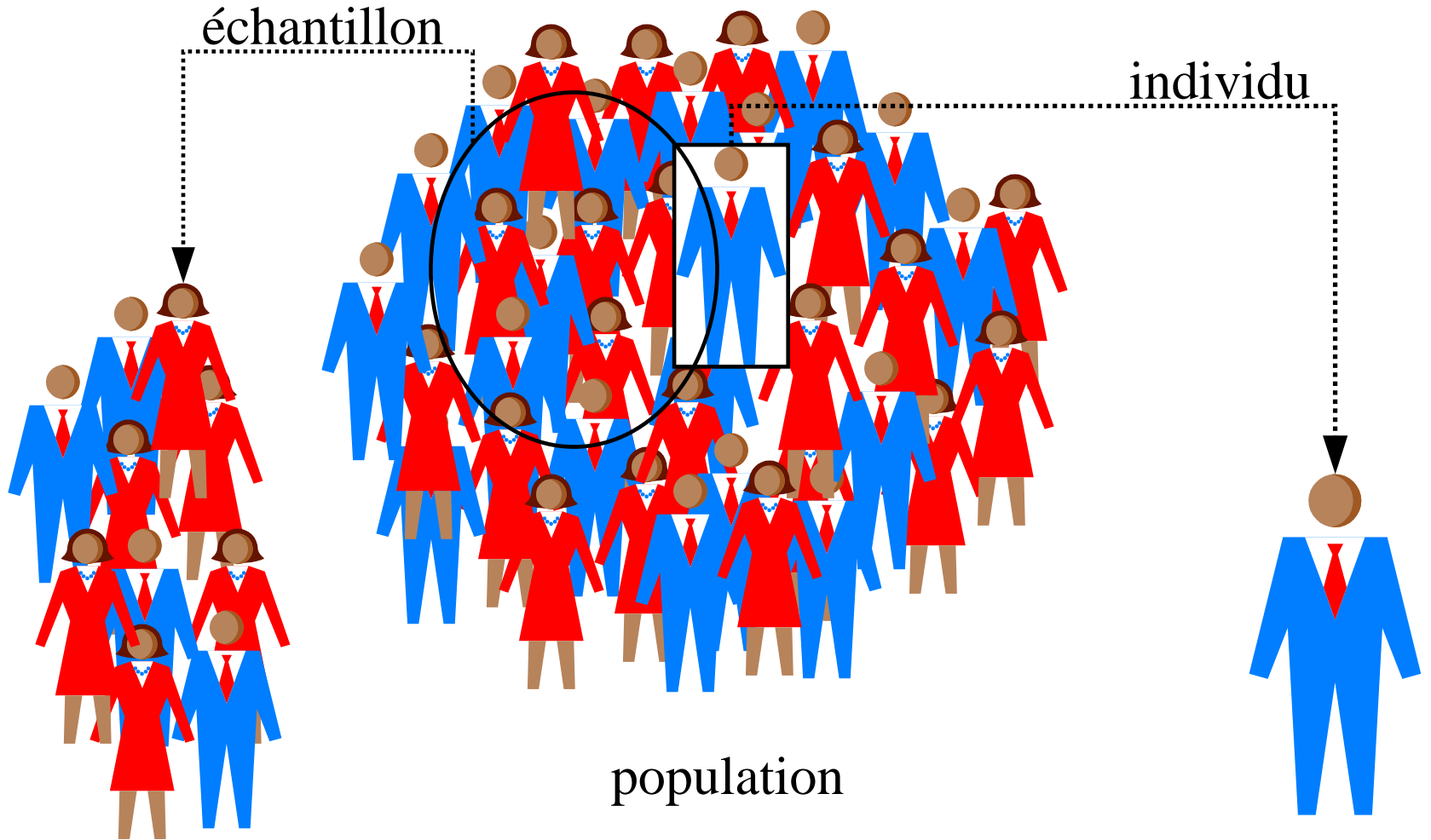
Mai 2006

Harbouche Lahcène Ingénieur de recherche

Tél : 54 55 80 500

Lahcene.harbouche@tudor.lu

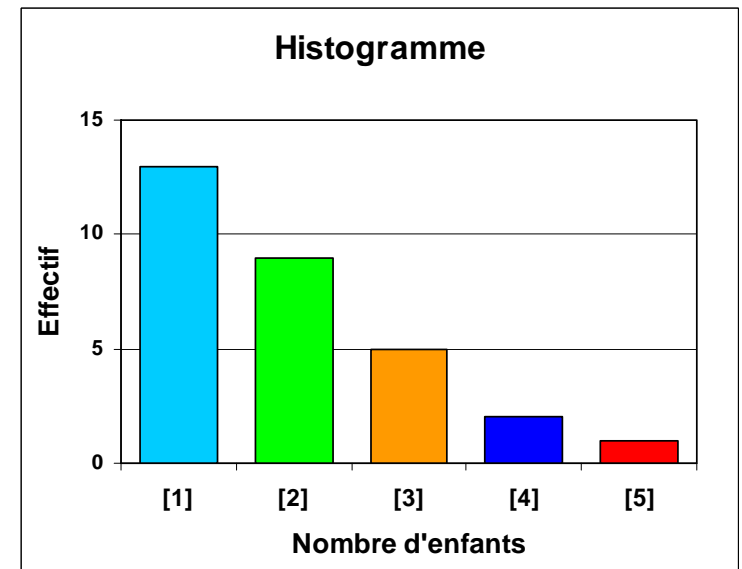
- **Statistiques I : introduction**
- **Introduction à la MSP**
- **Statistiques II : tests de normalité**
- **Capabilité processus et machine**
- **Capabilité moyen de contrôle**
- **Analyse des cartes en différé**
- **Capabilité et % non-conforme**
- **Résumé**



# INDICATEURS STATISTIQUES

## Exemple sur le nombre d'enfants dans une famille

Nombre d'enfants	Effectif	Fréquence	Fréquence relative %	Fréquence cumulée
1	13			
2	9			
3	5			
4	2			
5	1			
Total	30			



**Définition** : nombre d'individus possédant ce caractère divisé par l'effectif total de la population ou de l'échantillon

Soit  $a_i$  un caractère d'une variable statistique  $X$ ,  
d'effectif  $n_i$ , la fréquence  $f_i$  de ce caractère est donnée par :

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Fréquence relative (pourcentage) :

$$f_i^{\%} = f_i \times 100$$

Nombre d'enfants	Effectif	Fréquence	Fréquence relative (%)
1	13	0.43	43
2	9	0.3	30
3	5	0.17	17
4	2	0.067	6.7
5	1	0.033	3.3
Total	30	1	100

La « fréquence cumulée d'ordre k » est la somme des k premières fréquences:

$$F_k = f_1 + f_2 + \dots + f_k = \sum_{i=1}^k f_i$$

De même pour les fréquences cumulées relatives:  $F_k^{\%} = f_1^{\%} + f_2^{\%} + \dots + f_k^{\%} = \sum_{i=1}^k f_i^{\%}$

**Remarque:** ces définitions sont valables pour les données quantitatives

Nombre d'enfants	Effectif	Fréquence	Fréquence relative %	Fréquence cumulée
1	13	0.43	43	0.43
2	9	0.3	30	0.73
3	5	0.17	17	0.9
4	2	0.067	6.7	0.97
5	1	0.033	3.3	1
Total	30	1	100	1

Les indicateurs statistiques sont des estimations de caractéristiques qui permettent de cerner un phénomène difficilement mesurable.

## Mesure de tendance centrale

- **le mode** (mode)
- **la médiane** (median)
- **la moyenne** (average)

## Mesure de dispersion

- **l'étendue** (range)
- **l'écart-type** (standard deviation)
- **la variance** (variance)



## Le mode (Mo)

**Définition** : valeur la plus fréquente ou dominante de la variable étudiée, c'est-à-dire celle qui a la fréquence relative la plus élevée

## La médiane (Med)

**Définition** : valeur centrale d'une population supposée rangée

**Remarque** : en écriture mathématique :  
 $P(X \geq \text{Med}) \geq 0.5$   
 $P(X \leq \text{Med}) \geq 0.5$

## La moyenne (Moy)

**Définition** : somme de toutes les valeurs divisée par le nombre de données observées

**Remarque** : la moyenne est une mesure sensible aux valeurs extrêmes

Nombre d'enfants	effectif	fréquence	fréquence relative %	fréquence cumulée
1	13	0.43	43	0.43
2	9	0.3	30	0.73
3	5	0.17	17	0.9
4	2	0.067	6.7	0.97
5	1	0.033	3.3	1
Total	30	1	100	

$Mo = 1$

Remarque : il existe des distributions avec 2 ou plusieurs modes (**bimodale** ou **multimodale**)

$Med = 2$

Remarque : la médiane est souvent utilisée pour des données démographiques ou salariales

$Moy = 1.96$

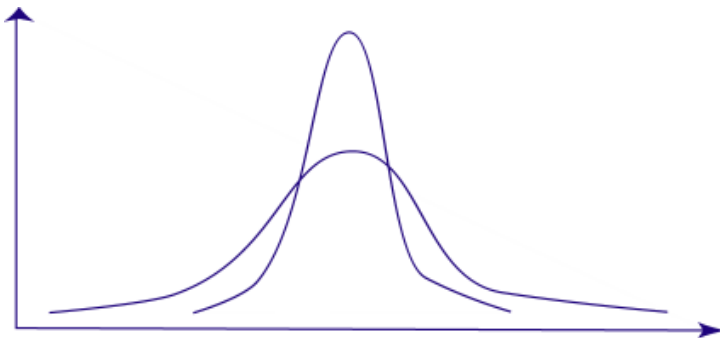
$$Moy = \frac{13*1 + 9*2 + 5*3 + 2*4 + 1*5}{30}$$

$$Moy = 1.96$$

Les mesures de tendance centrale ne rendent pas compte de la variation et de la dispersion des données.

Avec les mesures de dispersion, on dispose d'informations complémentaires sur l'éparpillement des données, sur leur éloignement par rapport au centre, sur leur variation ou leur dispersion.

Deux distributions peuvent avoir le même mode, la même médiane et la même moyenne, mais présenter des formes différentes.



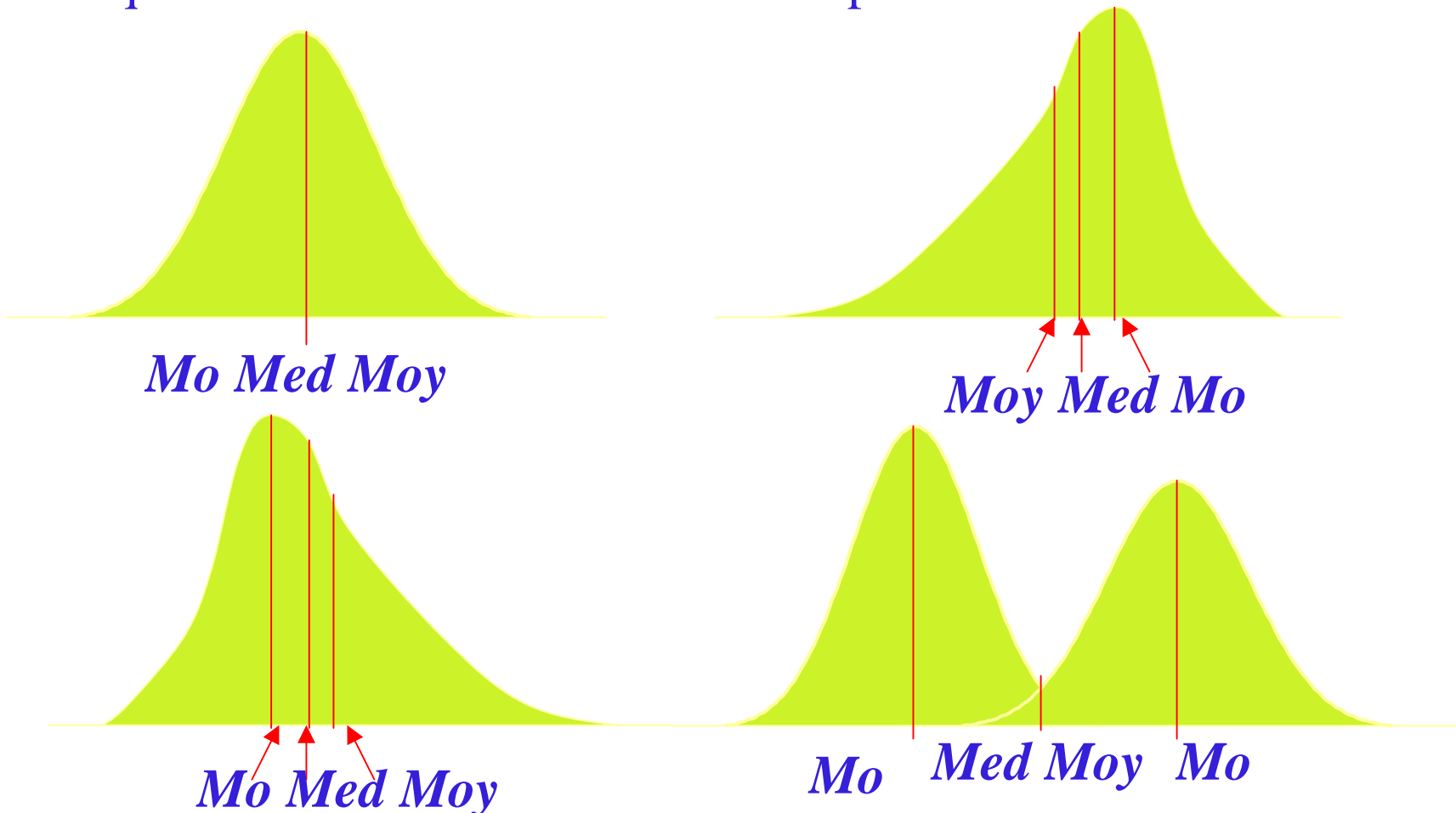
## Etendue

Cette mesure permet une approche très simple de la dispersion. On peut la définir comme étant la longueur de l'intervalle dans lequel se situent les données de la distribution.

$\text{Etendue} = \text{Maximum} - \text{Minimum}$

Une distribution est caractérisée par une mesure de tendance centrale et une mesure de dispersion

Chaque indicateur est sensible à un aspect de la distribution...



## La Variance (Var)

**Définition** : moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs à leur moyenne

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - Moy)^2}{n}$$

Remarque : la variance est toujours positive ou nulle, et insensible à l'ajout d'une constante aux données

## L'écart-type ( $\sigma$ )

**Définition** : racine carrée de la variance

Par rapport aux autres mesures, l'écart-type donne plus d'importance aux écarts importants par rapport à la moyenne. Il a la même unité que la moyenne (Moy)

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - Moy)^2}{n}}$$

# INTRODUCTION A LA MAITRISE STATISTIQUE DES PROCESSUS

**MSP (Maîtrise statistique du processus)**

**=**

**SPC (Statistical Process Control)**

**Le but est ici de maîtriser le processus et non de contrôler directement la qualité du produit**

**MSP (Maîtrise statistique du processus)**  
**=**  
**SPC (Statistical Process Control)**

**Le but est ici de maîtriser le processus et non de contrôler directement la qualité du produit**

**Le SPC permet de représenter la réalité sous forme pragmatique, afin de :**

- **Mieux comprendre**
- **Prévoir**
- **Anticiper**



**Ensemble d'actions pour évaluer, régler et maintenir un processus de production en état de fabriquer tous ses produits aux spécifications retenues avec des caractéristiques stables dans le temps (AFNOR)**

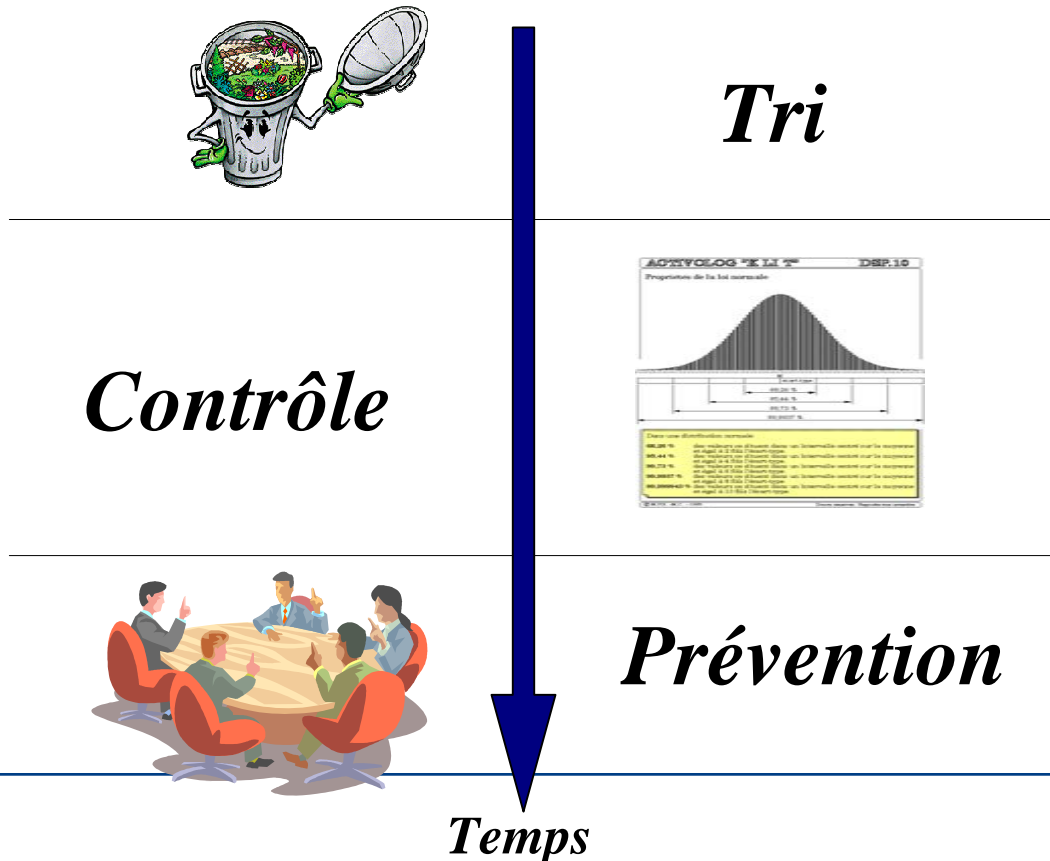
**C'est une suite d'analyse qui comprend:**

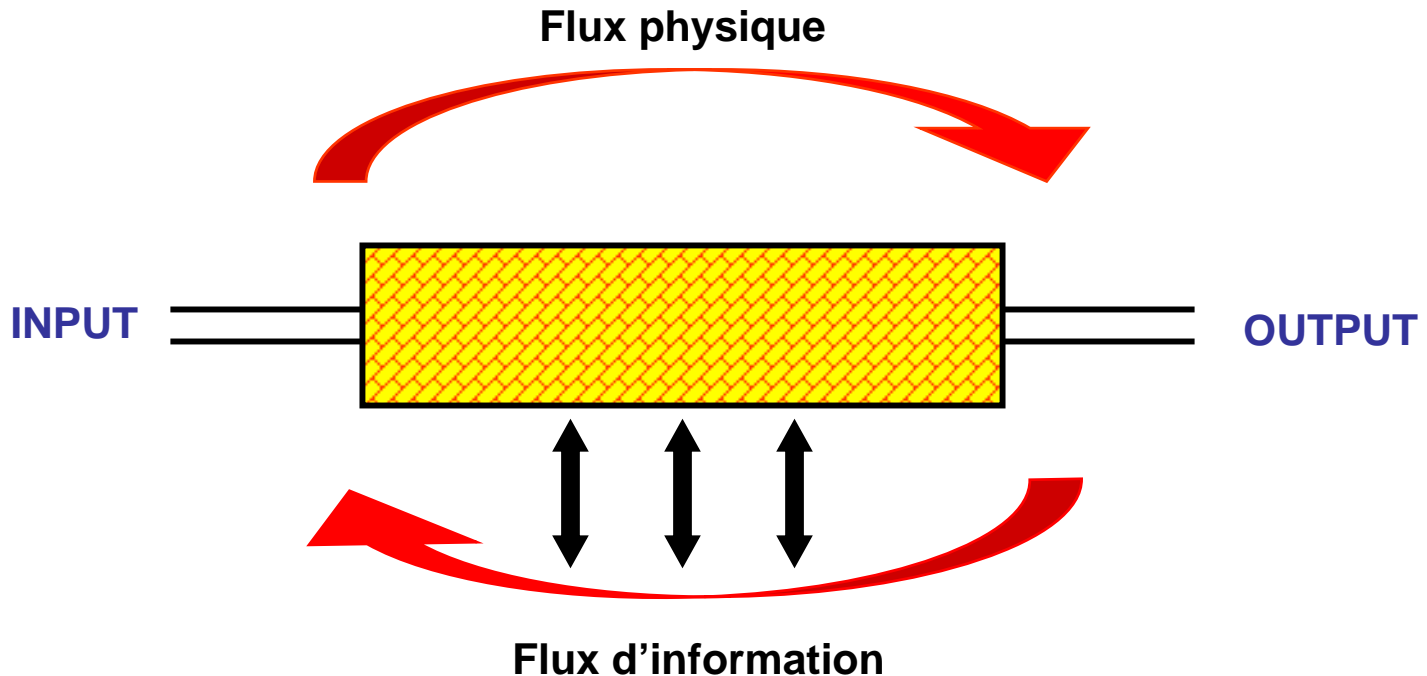
- **Réflexion sur le processus**
- **Identification des caractéristiques significatives pour le client**
- **Validation des outils de production et de contrôle**
- **Déploiement des cartes de contrôle**

- **Amélioration de la Production et de la Productivité,**
- **Amélioration des échanges d'information,**
- **Participation à la rationalisation de la démarche de résolution de problèmes,**
- **Meilleure maîtrise des procédures, processus, moyens et produits,**
- **Élever le niveau de compétence de l'ensemble du personnel,**
- **Amélioration des échanges avec le client,**
- **Répondre au besoins des clients,**
- **Amélioration de l'image de l'entreprise vis-à-vis des auditeurs,**
- **Evolution quantitative de la qualité**

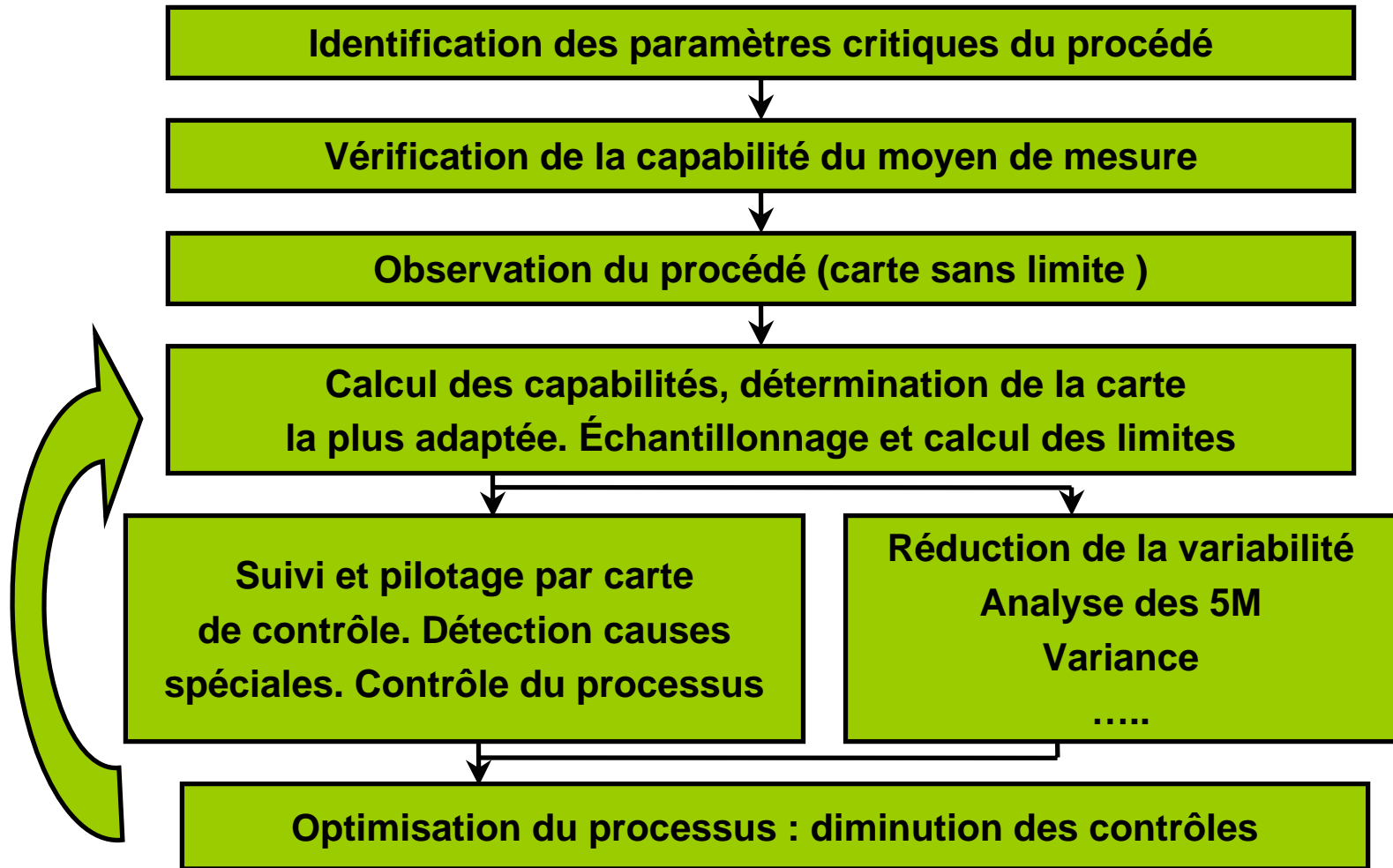
# Pourquoi le SPC ?

Si le concept de contrôle statistique de la qualité date de plus de 2 siècles (Whitney en 1798 aux USA), il faut attendre les travaux de Walter A. Shewhart dans les années 30 pour assister à la naissance du SPC (Statistical Process Control)





**Ce flux d'informations est la base du SPC : carte de contrôle, journal du processus, groupe de travail, groupe d'amélioration, etc...**



Une inspection ne garantit pas que l'on trouve tous les défauts. Elle n'ajoute rien à la qualité et coûte de l'argent.

*Objectif du SPC : diminuer la variabilité des processus*

**Aspect gigogne : Qualité produit et qualité d'une caractéristique**

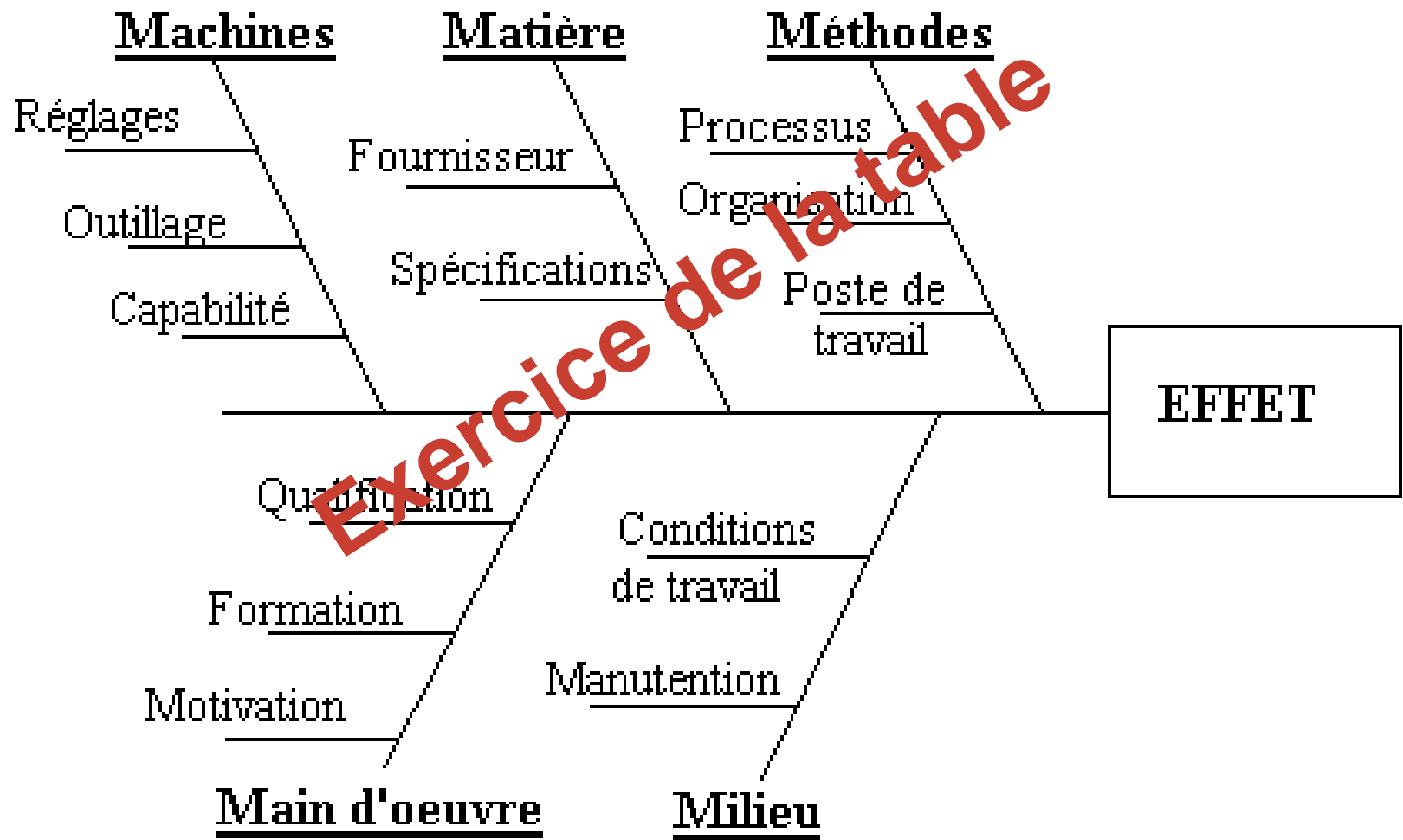
**Paramètres participant au bon fonctionnement du produit**

**Paramètres identifiés comme étant liés au fonctionnement (BE)**

**Paramètres potentiellement surveillables (méthodes)**

**Paramètres réellement surveillés (production)**

# Les paramètres influents



Une image vaut mieux qu'un long discours





## Fabrication d'allumettes

6.2	5.7	6.1	6	5.8	5.9	5.7	5.9	6.2	6.4
5.9	6.2	5.9	6	6.2	6.3	5.9	6.2	6.1	6.2
5.8	6.4	6.1	6.3	6.2	6.1	5.7	6.1	6	6.2
6.5	6.3	6	6.1	6.2	5.9	6.3	6.1	5.9	6.1
6.4	6	5.9	6	6.4	6	6	6.1	6	6

- Tolérance supérieure : 6.7
- Tolérance inférieure : 5.3

## ↗ Valeurs individuelles

↗ Film de la production

↗ Histogramme des valeurs individuelles

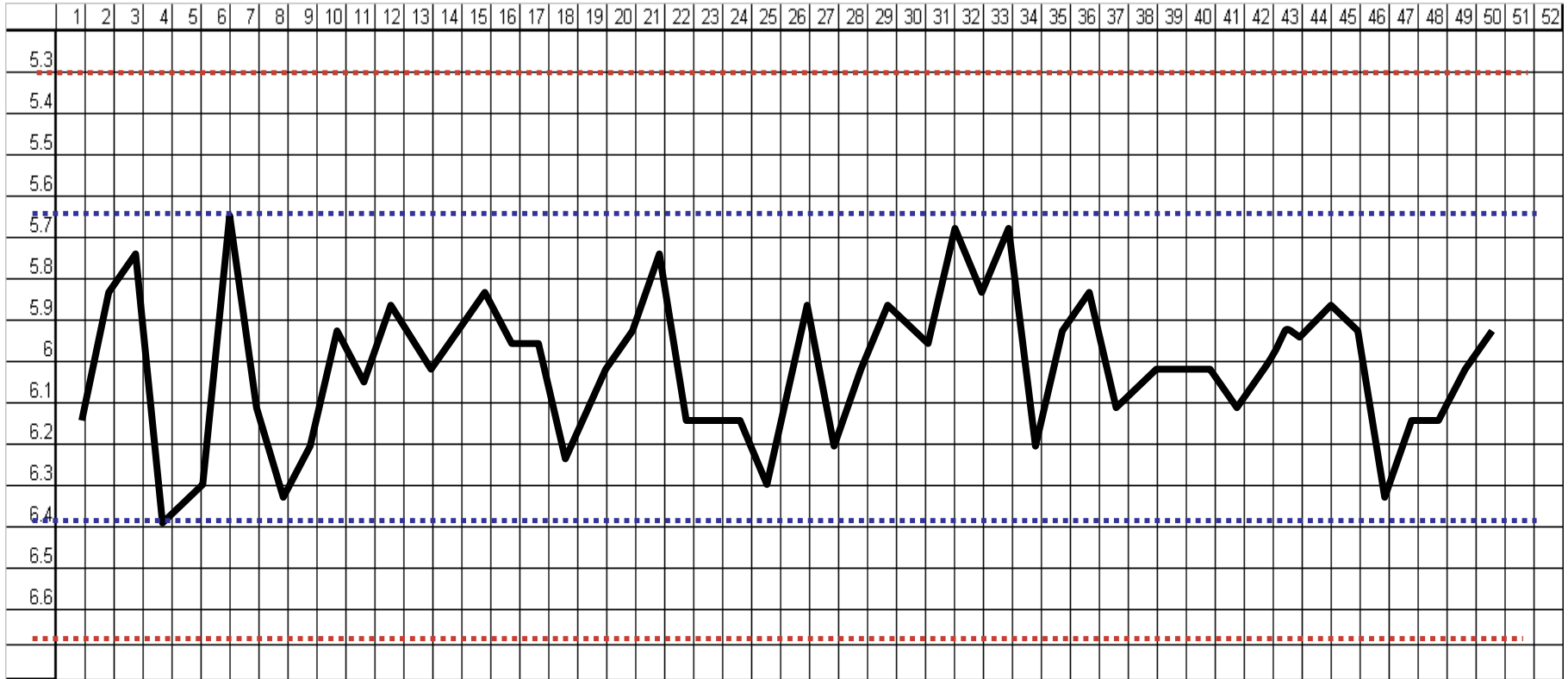
## ↗ En sous groupes

↗ Centrage

↗ Dispersion

# EXERCICE 1



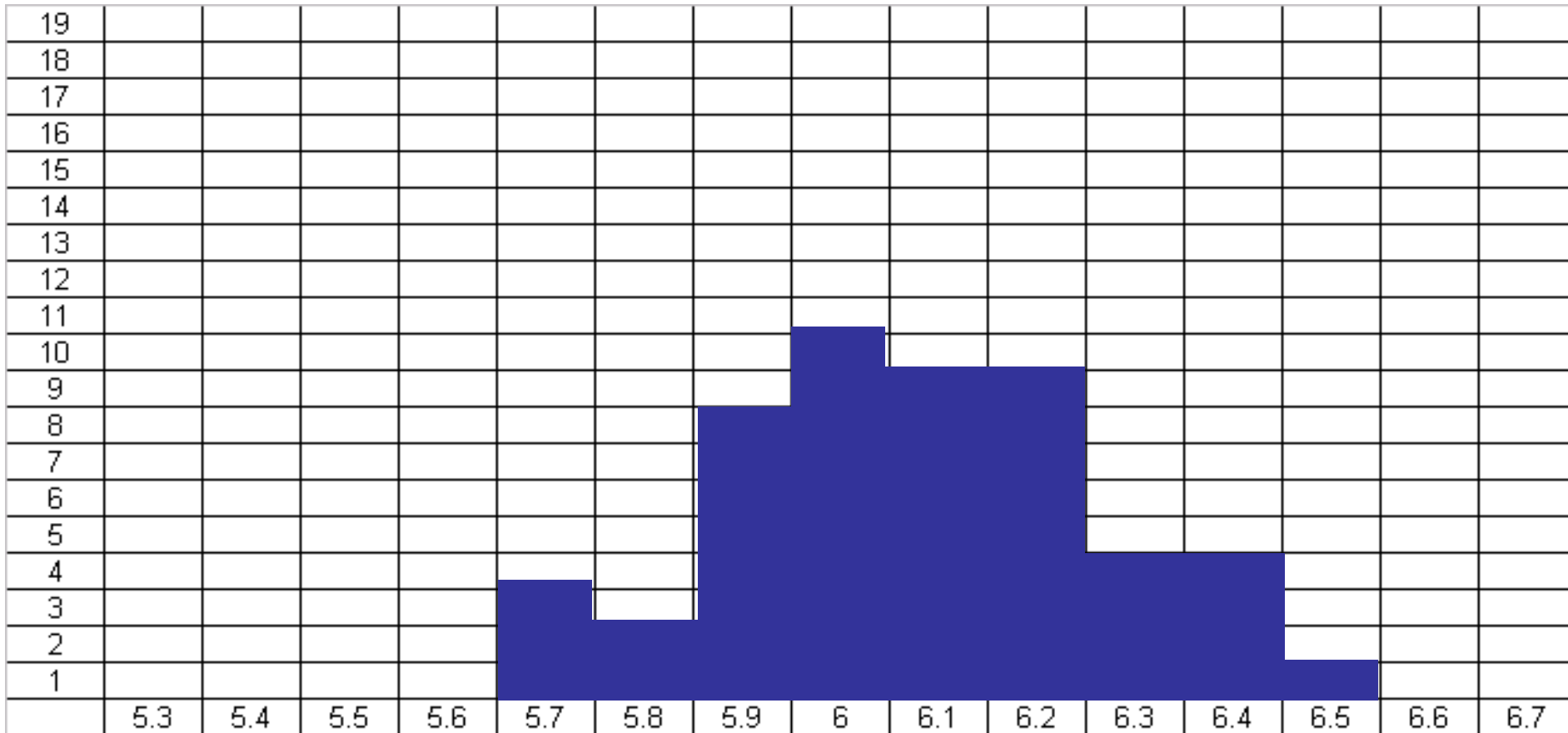


..... Tolérances  
..... Min / Max

## L'histogramme

19															
18															
17															
16															
15															
14															
13															
12															
11															
10															
9															
8															
7															
6															
5															
4															
3															
2															
1															
	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7

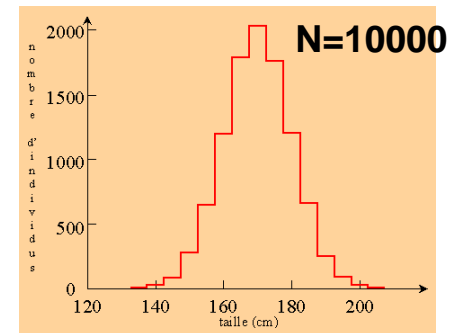
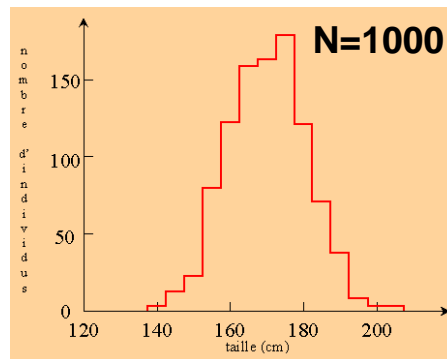
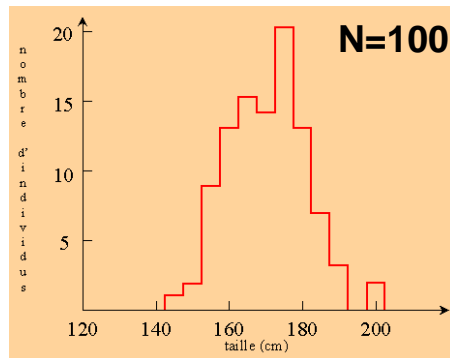
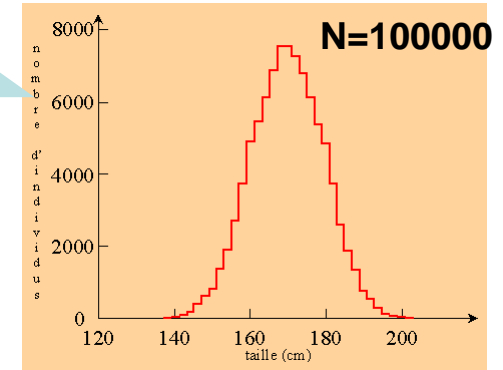
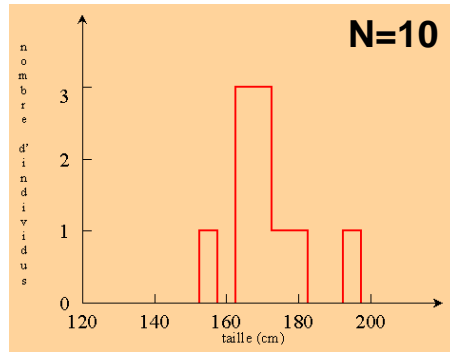
## L'histogramme



# Distribution et loi normale

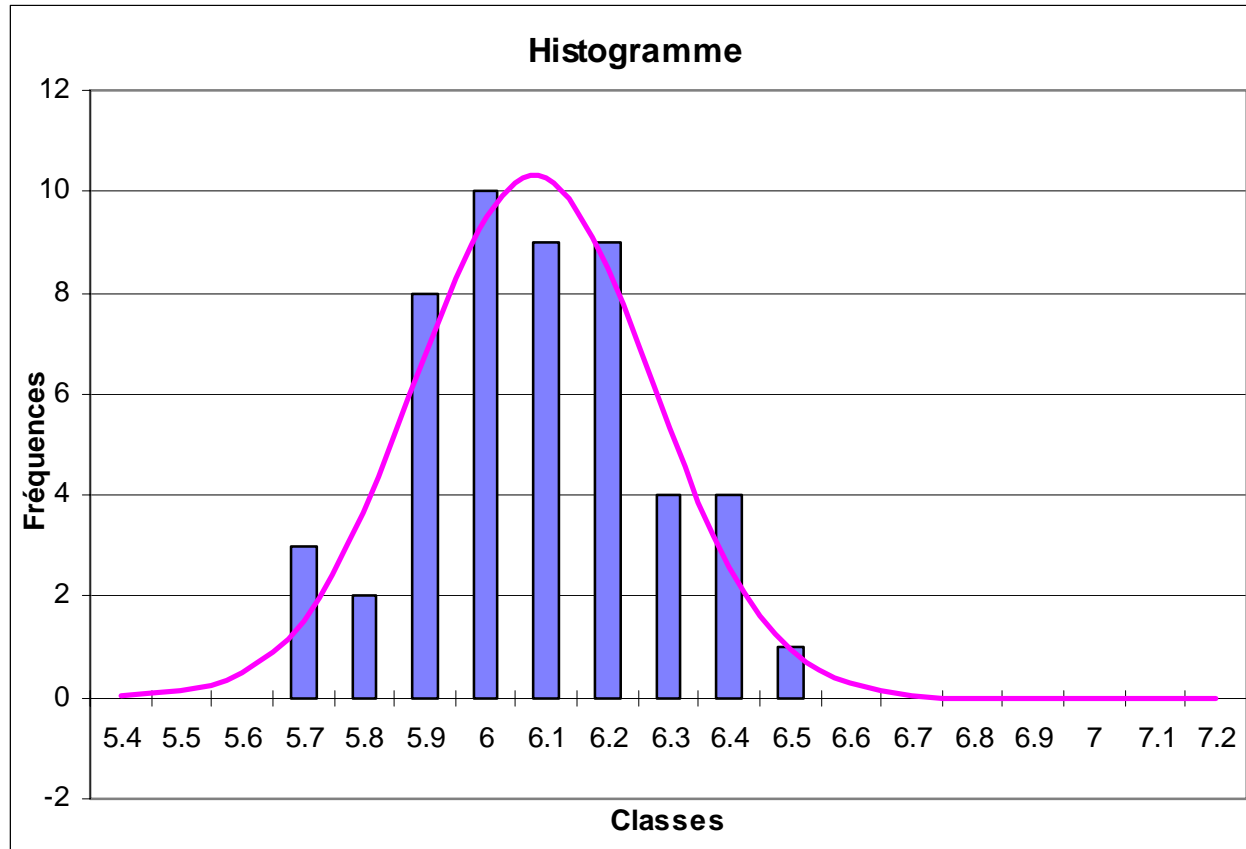






Au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente (et que la taille des classes diminue), l'histogramme devient de plus en plus régulier et se rapproche d'une courbe en cloche, appelée loi normale (exemple pour la taille)

## Lien entre histogramme et loi théorique



La loi Normale  $N(\mu, \sigma)$  est une loi continue qui joue un rôle fondamental en statistique (Cf. Théorème central limite)

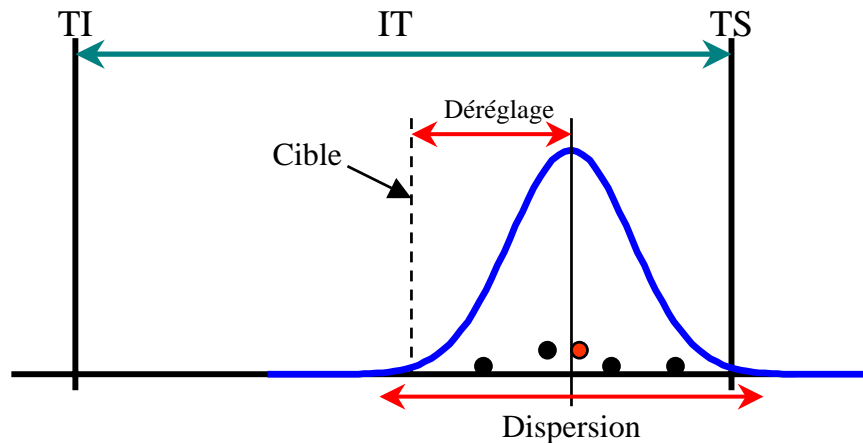
Elle constitue un modèle fréquemment utilisé dans divers domaines

Elle permet de décrire la variation d'une caractéristique d'une pièce dans une fabrication industrielle et de la répartition des erreurs de mesure autour d'une « vraie valeur »

La dispersion des valeurs provient de 2 causes :

1. *Décentrage de la machine,*
2. *Dispersion de la machine*

L'échantillon (regroupant plusieurs données) élimine en partie l'effet de la dispersion. Les variations proviennent alors en grande partie du décentrage



- Moyenne de l'échantillon
- Valeur individuelle

La loi Normale  $N(\mu, \sigma)$  :

Sa fonction de distribution est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Espérance mathématique :  $E(X) = \mu$

Variance :  $\text{Var}(X) = \sigma^2$

## Loi normale centrée réduite $N(0,1)$ :

Cette loi dérive de la loi Normale  $N(\mu, \sigma)$  par un changement de variable.

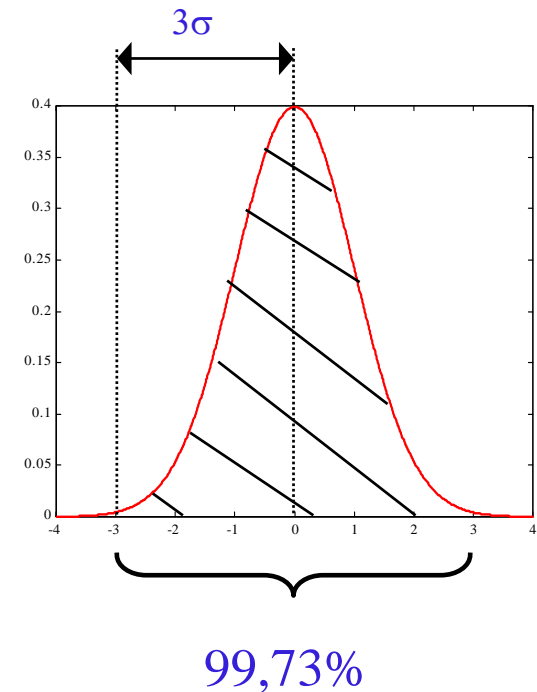
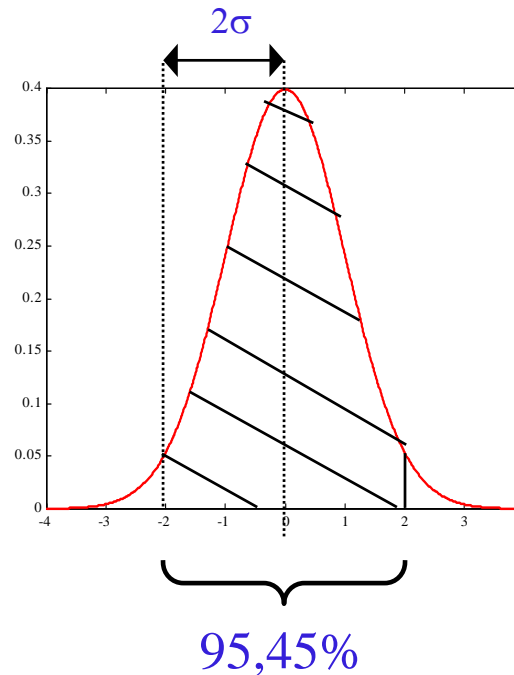
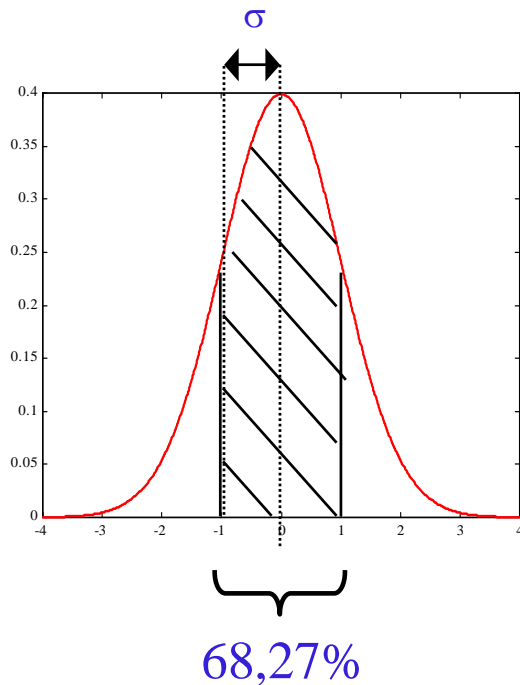
1<sup>ère</sup> transformation :  $X = x - \mu$  (centrage)

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}$$

2<sup>ème</sup> transformation :  $Z = \frac{X}{\sigma}$  (réduction)

$$-\infty < Z < +\infty \quad f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

## Propriétés de la loi Normale $N(\mu, \sigma)$





Il est fondamental de s'assurer qu'une population a un comportement similaire à une loi normale pour un phénomène donné. En effet, cette loi est à la base d'un grand nombre d'hypothèses en SPC.

S'il n'y a pas de normalité :

- Présence de phénomène(s) particulier(s) ? (potentiel d'amélioration)
- Le % hors tolérance n'est plus facilement estimable
- Utiliser les estimateurs de moyenne et de dispersion
- Représenter les données sur un histogramme

## Comment vérifier la normalité d'un échantillon ?

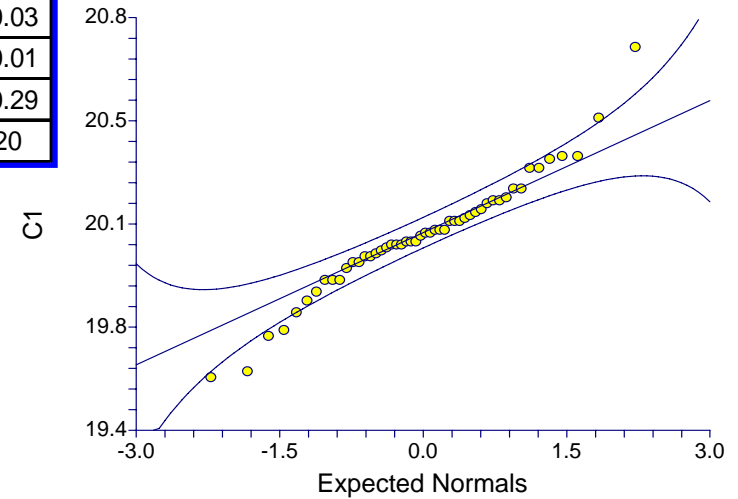
1. La droite de Henry
2. Les tests du khi-2
3. Le test de Shapiro et Wilk

## La droite de Henry

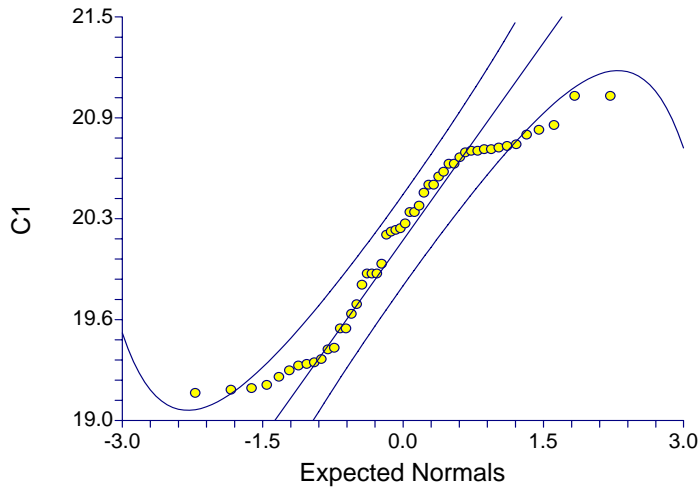
- **Définition** : il s'agit de vérifier si, dans une population, la distribution peut être ajustée à une loi normale, sans forcément connaître  $m$  ou  $s$ .
- **Principe** : le test porte sur la courbe des fréquences cumulées de l'échantillon, tracée dans un « repère gaussien-arithmétique ». Prévoir un échantillon suffisamment grand (plus grande sera la justesse).
- Placer à la main toutes les valeurs de l'échantillon sur le graphique, c'est-à-dire pour chaque point :
  - la valeur en abscisse,
  - la fréquence cumulée de l'échantillon en ordonnée.
- **Conclusion** : si les points sont très bien alignés, l'hypothèse de normalité n'est pas rejetée (jugement subjectif).

20.02	19.97	20.12	19.87	20.04	19.91	20.22	20.08	19.95	20.18
20.18	20.33	20.29	19.84	19.72	20.32	20.14	19.91	19.58	20.03
20.11	20.07	20.03	19.99	20.33	19.99	20.11	20.04	20.08	20.01
20.06	20.08	19.91	20.07	20.46	20.19	19.97	20.04	19.74	20.29
20.22	19.8	20.17	20.03	20.7	20.11	20.13	20.15	19.6	20

Normal Probability Plot of C1



Normal Probability Plot of C1



20.67	20.46	19.22	20.68	19.45	20.41	20.69	19.91	21.01	19.57
20.29	20.18	19.35	20.59	19.38	19.91	19.66	21.01	19.72	19.84
20.63	20.51	20.77	19.27	20.68	19.57	20.8	19.19	20.33	19.17
19.91	20.66	19.44	20.29	19.34	20.71	19.97	20.19	20.46	20.67
20.17	20.22	19.2	20.54	19.36	20.15	20.83	19.31	20.7	20.59

**Tracer la droite de Henry pour cet échantillon  
(répartition de la taille) :**

6.2	5.7	6.1	6	5.8	5.9	5.7	5.9	6.2	6.4
5.9	6.2	5.9	6	6.2	6.3	5.9	6.2	6.1	6.2
5.8	6.4	6.1	6.3	6.2	6.1	5.7	6.1	6	6.2
6.5	6.3	6	6.1	6.2	5.9	6.3	6.1	5.9	6.1
6.4	6	5.9	6	6.4	6	6	6.1	6	6

**Peut-on conclure sur le résultat ?**

## Les tests du khi-deux ( $\chi^2$ )

Il existe 3 tests :

- **Test d'ajustement** : l'échantillon suit-il une loi connue ?
- **Test d'indépendance** : les 2 variables observées sont-elles indépendantes ?
- **Test d'homogénéité** : les échantillons (de même taille) observés proviennent-ils d'une même population ?

L'idée des tests repose sur la comparaison entre la répartition expérimentale et la répartition théorique (loi normale pour le SPC).

Il est important d'avoir de grands échantillons (au moins 50 valeurs). Cela suppose l'existence d'un grand nombre d'observations groupées en classes (histogramme).



## TEST D'AJUSTEMENT : l'échantillon provient-il d'une loi connue ?

- Répartir les  $n$  observations en  $k$  classes avec  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  les effectifs observés dans chaque classe (on utilise souvent  $k = \sqrt{n}$ )
- Calculer la moyenne ( $m$ ) et l'écart-type ( $s$ ) de l'échantillon,
- Calculer  $u_i = \frac{(e_i - m)}{s}$ ,  $e_i$  étant la valeur de la limite supérieure de la classe  $i$ ,
- Rechercher les valeurs  $F(u_i)$  dans la table de la loi  $N(0,1)$  (fréquence théorique) puis  $n(F(u_{i+1}) - F(u_i)) = np_i$
- Déterminer la valeur de

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

- d suit une loi du  $\chi^2$  à  $(k-r-1)$  d.d.l. (degré de liberté), où  $r$  est le nombre de paramètres estimés pour que la loi théorique soit entièrement déterminée (ici 2 pour  $m$  et  $s$ )
- Hypothèse :  
 $H_0$  : « La distribution observée suit la loi théorique »  
contre  $H_1$  : « La distribution observée ne suit pas la loi théorique »
- Effectuer le test pour une loi normale  $N(m,s)$  en ayant choisi le risque  $\alpha$  souhaité (5 % par exemple)

EXEMPLE : Echantillon de taille 128 ( $m = 30.19$  et  $s = 0.61$ ), on choisit 15 classes comme suit :

Limite classe inf	Limite classe sup	Effectif $n_i$	$u_i$	$F(u_i)$	$p_i$	Effectif théorique	$k_{hi-2}$
28.8	29	1	-1.95	0.0256	0.0256	3.3	1.60303
29	29.2	4	-1.62	0.0526	0.027	3.5	0.071429
29.2	29.4	10	-1.3	0.0968	0.0442	5.7	3.24386
29.4	29.6	10	-0.97	0.176	0.0792	10.1	0.00099
29.6	29.8	9	-0.64	0.2611	0.0851	10.9	0.331193
29.8	30	14	-0.31	0.3821	0.121	15.5	0.145161
30	30.2	20	0.02	0.508	0.1259	16.1	0.94472
30.2	30.4	16	0.34	0.6331	0.1251	16	0
30.4	30.6	13	0.67	0.7486	0.1155	14.8	0.218919
30.6	30.8	15	1	0.8413	0.0927	11.9	0.807563
30.8	31	9	1.33	0.9082	0.0669	8.6	0.018605
31	31.2	4	1.66	0.9515	0.0433	5.5	0.409091
31.2	31.4	0	1.98	0.9767	0.0252	3.2	3.2
31.4	31.6	1	2.31	0.9896	0.0129	1.7	0.288235
31.6	31.8	2	2.64	0.9959	0.0104	1.3	0.376923
							<b>11.65972</b>

Dans cet exemple, il y a  $15 - 2 - 1 = 12$  d.d.l.

Au risque 5%, la table du khi-2 donne un seuil de 21.026 au-delà duquel nous rejetons l'hypothèse  $H_0$ .

**Conclusion** : l'hypothèse  $H_0$  est acceptée

## Fabrication de jantes en tôle



Nous vous présentons la machine de production Quincux (SIM) qui réalise des jantes en tôle pour véhicule de tourisme



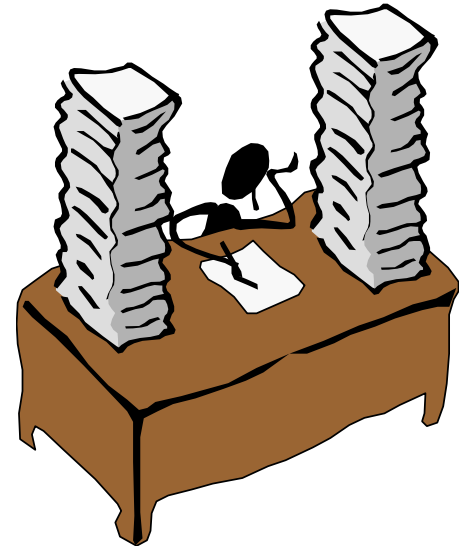
**Fabrication d'une  
centaine de jantes**

Les pièces fabriquées sont-elles bonnes ?

- Contrôle à 100 % ?
- Validation de la production par contrôle d'un échantillon?
- La Maîtrise Statistique des Processus (MSP = SPC)?



Dans cette méthode, l'opérateur contrôle l'ensemble de sa production. Cette méthode présente un avantage théorique évident : si elle est utilisée à tous les stades de la fabrication, aucun produit défectueux ne doit arriver chez le client.



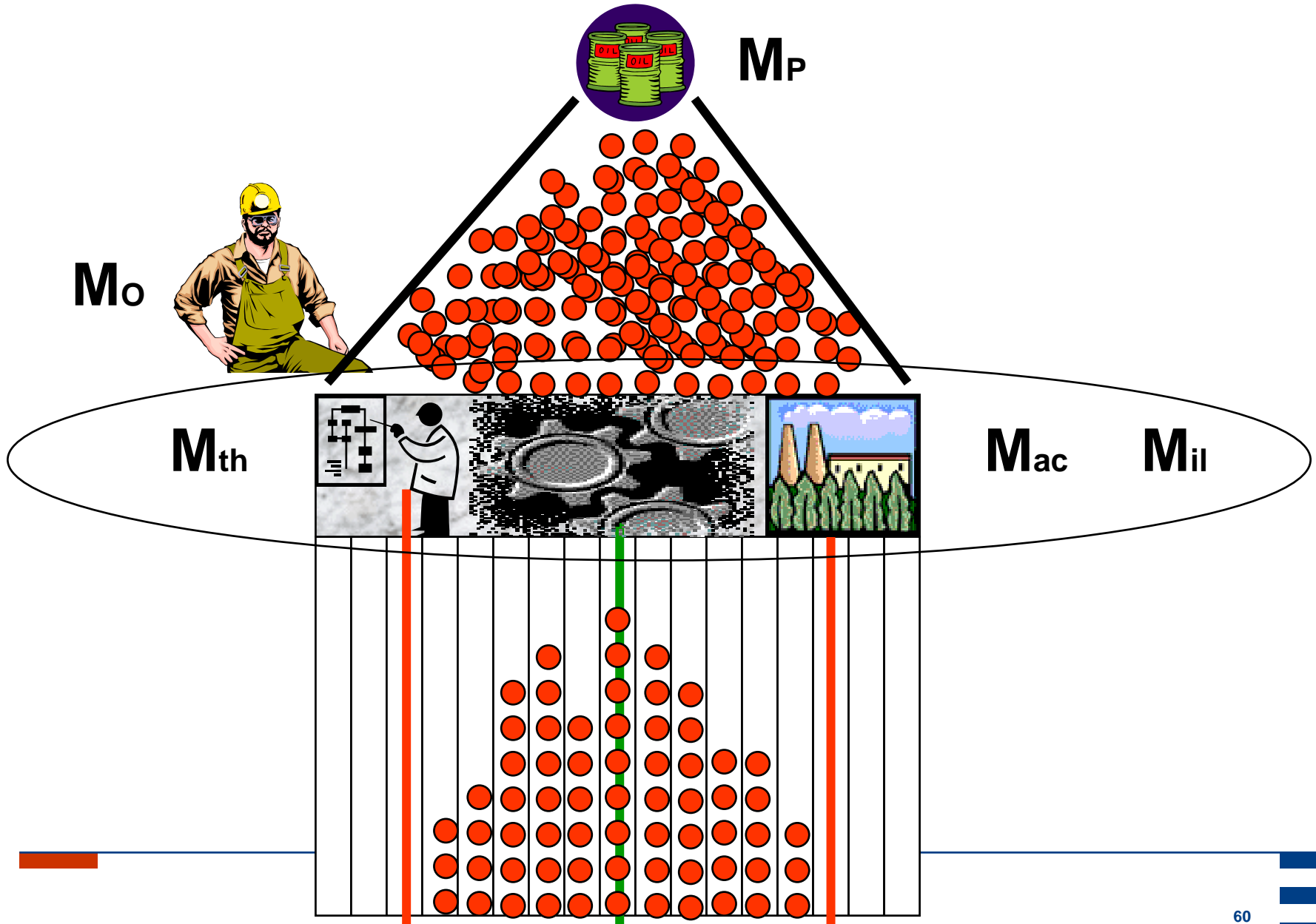
Dans cette méthode, l'opérateur contrôle une partie de sa production. Si celle-ci est correcte, il considère que l'ensemble de sa production est bonne.

L'avantage par rapport à la méthode précédente est un coût de contrôle moins élevé. Cependant, le risque théorique de laisser passer des produits non-conformes n'est plus nul.

La machine est munie d'un sélecteur de pièces qui permet de trier les jantes par grandeur.

- ↗ En vert : La ligne centrale représentant la cote nominale à atteindre.
- ↗ En rouge : De chaque côté de la cote nominale, les limites de contrôle.

# Le processus de fabrication



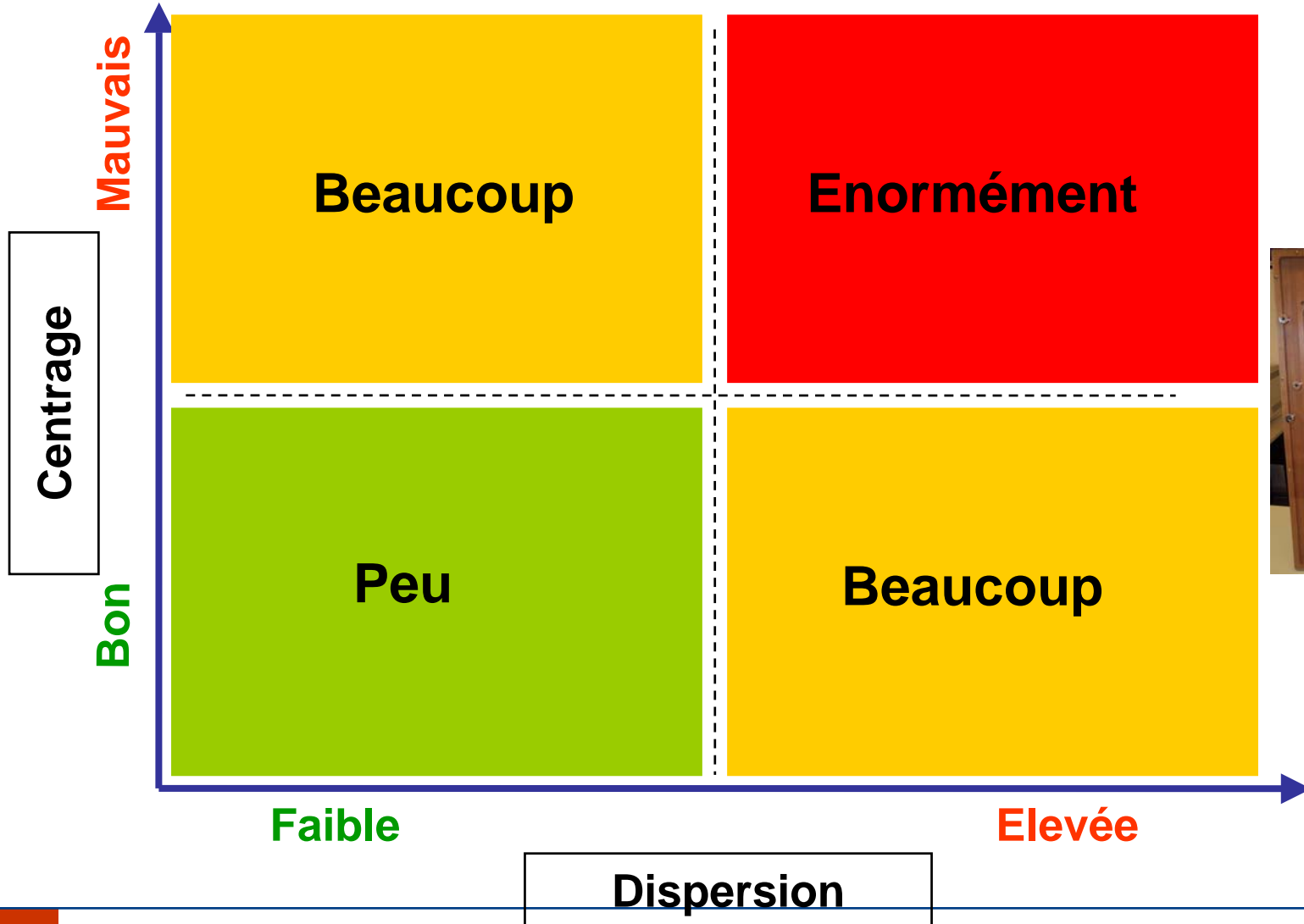
# Fabrication d'une centaine de jantes

L'ensemble de la série fabriquée est-elle conforme aux spécifications ?

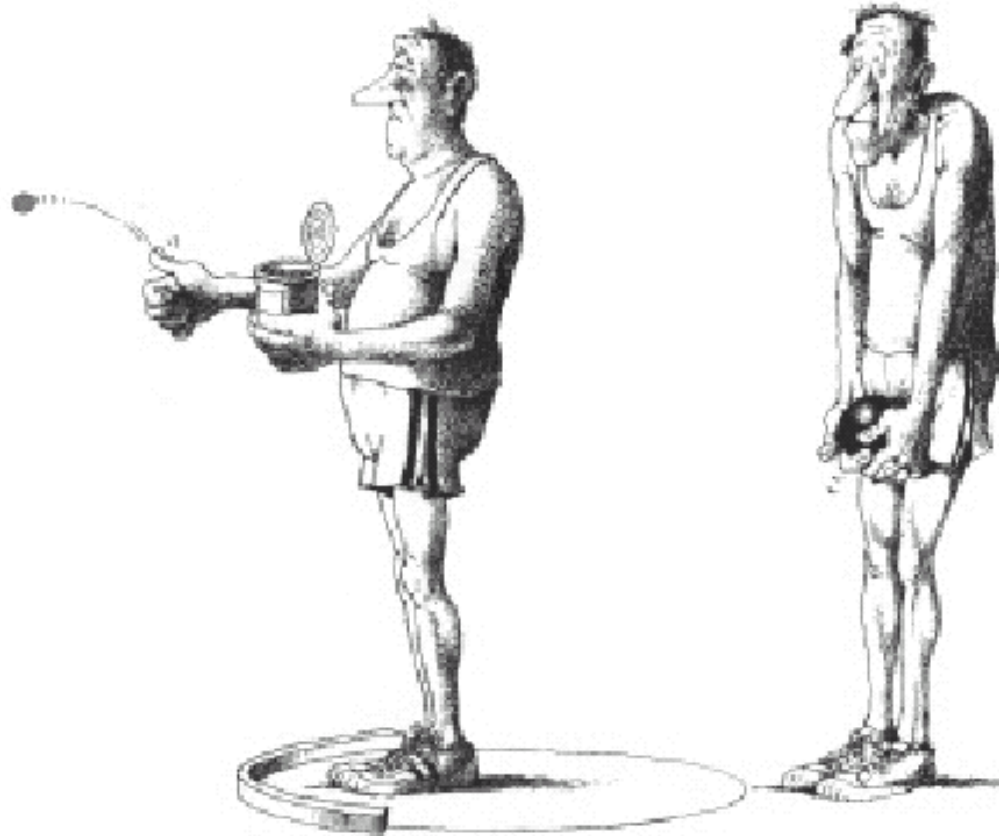
Doit-on vérifier l'ensemble de la fabrication selon les éléments vus précédemment ?

Une partie des pièces de la fabrication peuvent déjà nous donner une information sur les caractéristiques de l'ensemble de la série

1. Il est important de garder un centrage maximum car la variation perçue dans un échantillon est moins importante que dans la réalité.
2. L'échantillonnage est représentatif à partir de 5 pièces. Il nous permet donc d'estimer un centrage et une dispersion de la population.
3. Le processus doit être centré sur la cible et ne jamais se situer en dehors des limites.







*Notion de capabilité selon Serre.*

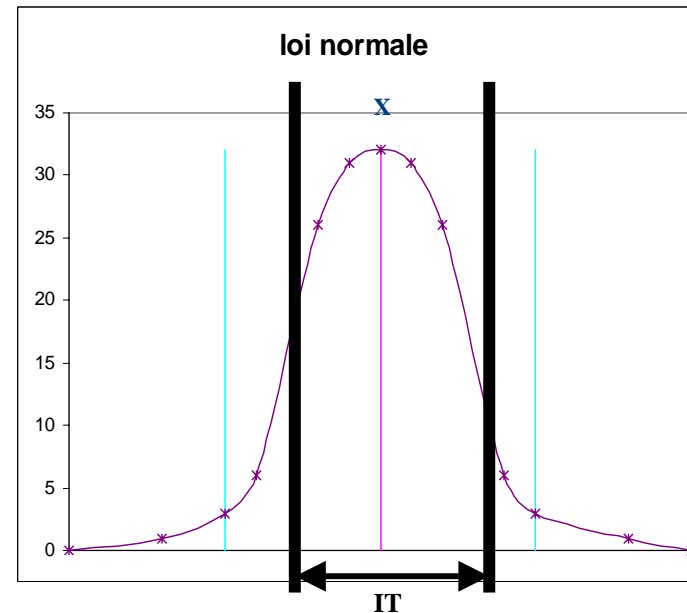
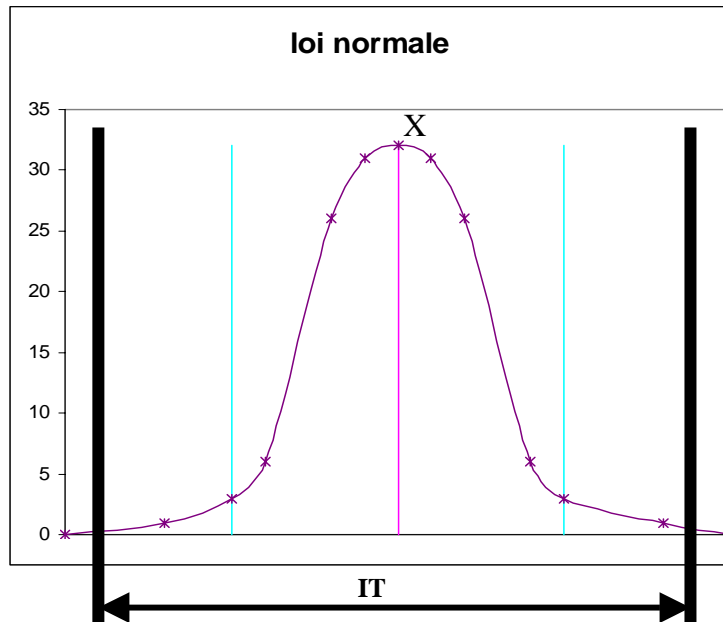
- La capabilité est la mesure établissant le rapport entre la performance réelle du procédé et la performance demandée.
- Il faut donc à travers ce procédé, définir la probabilité de produire le plus souvent possible, à l'intérieur des limites de spécifications.

➤ L'étude de capabilité doit intervenir après l'élaboration des modes opératoires et par conséquent, après le gel des gammes de fabrications, ceci dans le but de rendre comparable deux études prises à des moments différents.



**Notre processus est-il dans une situation permettant de générer des produit non conformes ?**

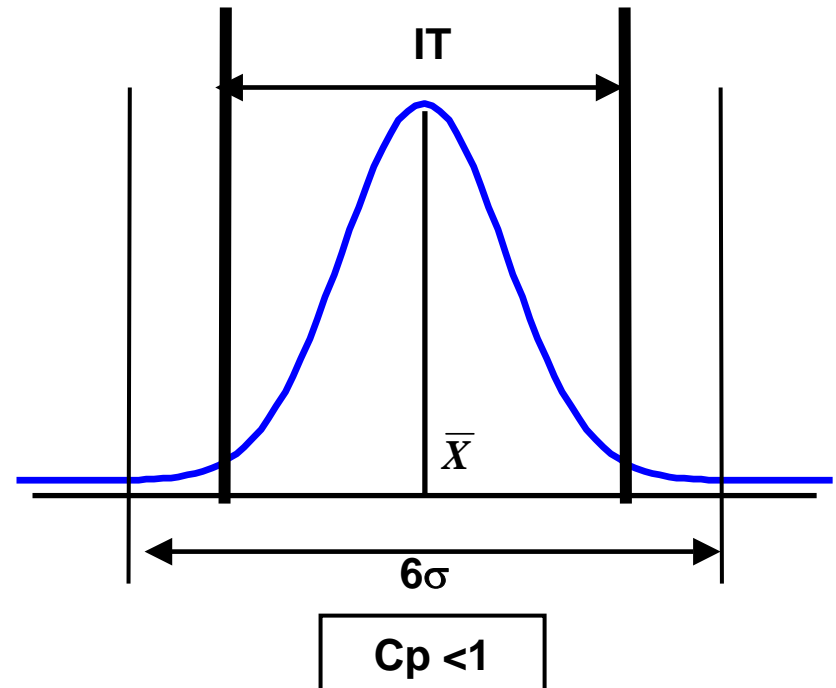
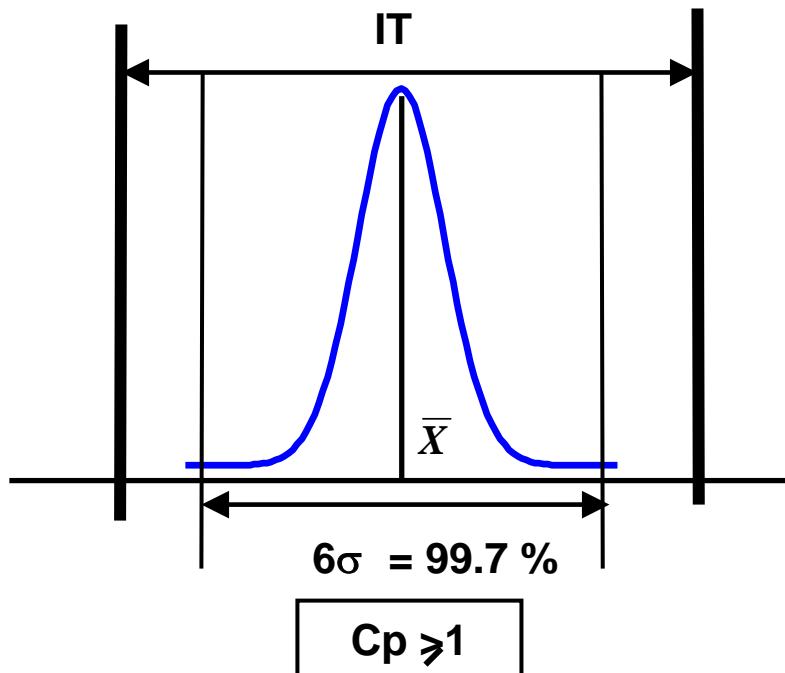
**La largeur de la loi normale permet-elle de s'insérer entre les limites de tolérances ?**



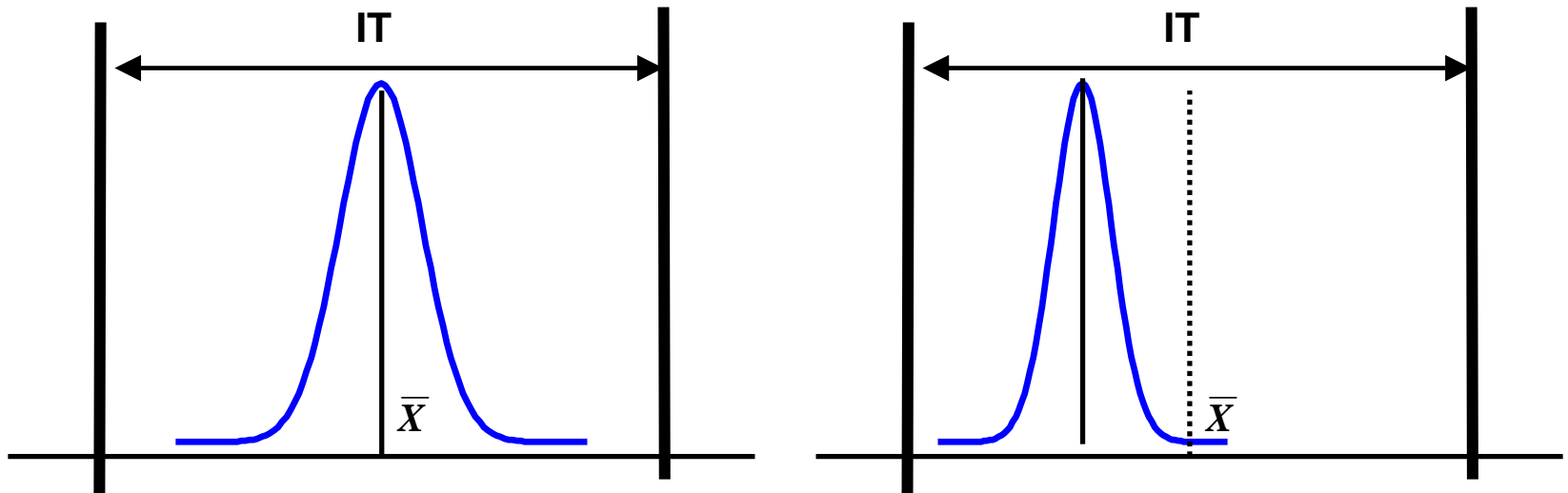
$$C_p = (T_s - T_i) / 6\sigma = IT / 6\sigma$$

$T_s$  = tolérance supérieure

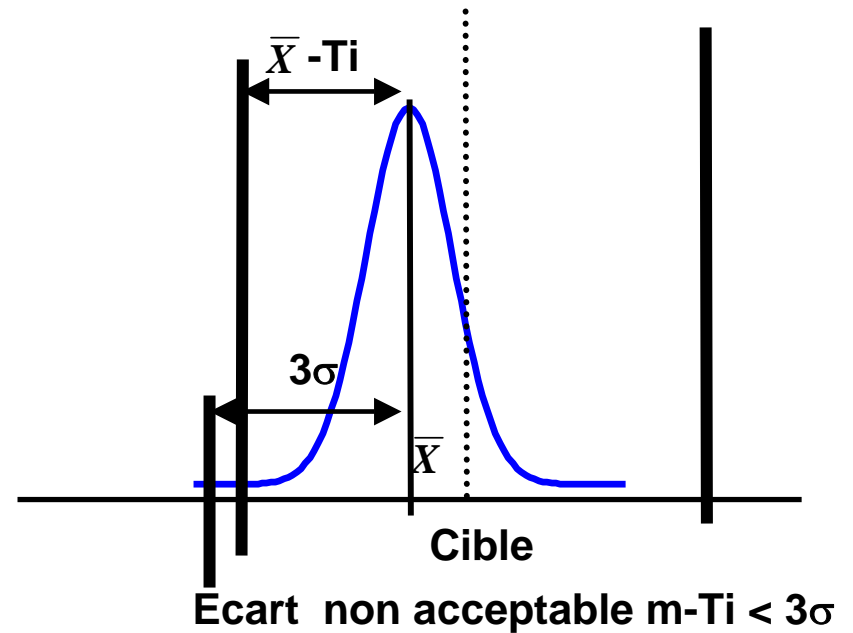
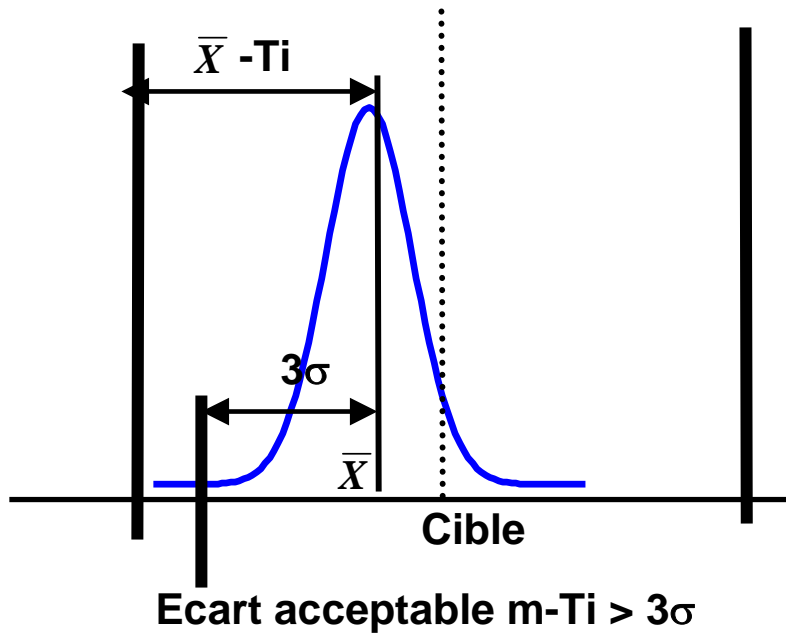
$T_i$  = tolérance inférieure



Comment se positionne ma loi normale dans l'intervalle de tolérance ?



Prendre en compte le plus petit car le plus défavorable:

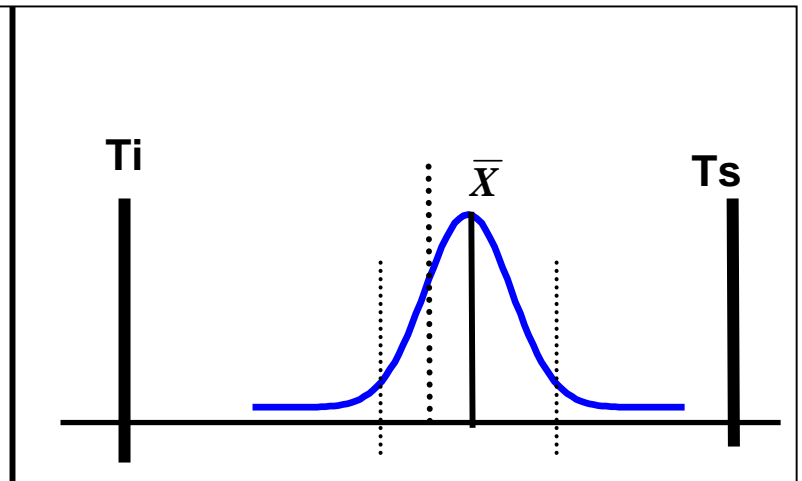
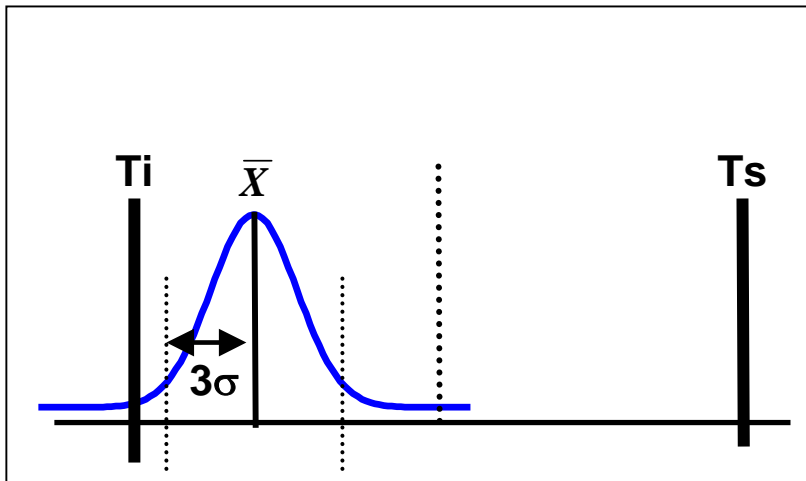


$$Cp_{ki} = (\bar{X} - T_i) / 3\sigma$$

$$Cp_{ks} = (T_s - \bar{X}) / 3\sigma$$

$$Cp_{ki} = (\bar{X} - Ti) / 3\sigma$$

$$Cp_{ks} = (Ts - \bar{X}) / 3\sigma$$



**Quel Cpk choisir ?**

$$Cpk = \min (Cpks ; Cпки)$$

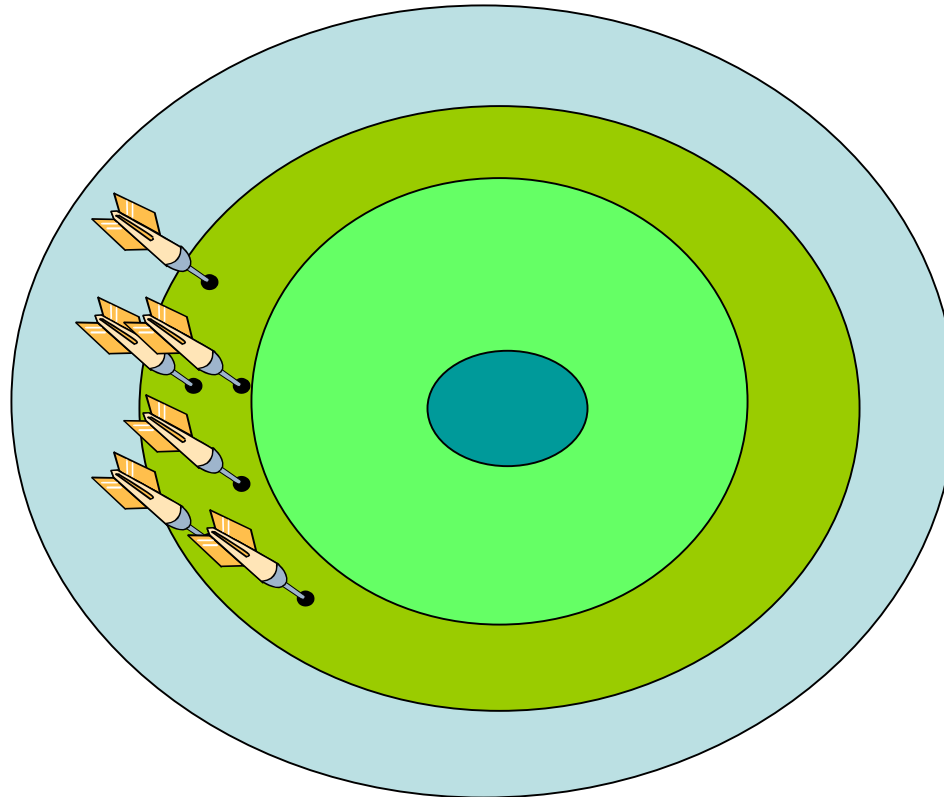
**Quel Cpk choisir ?**

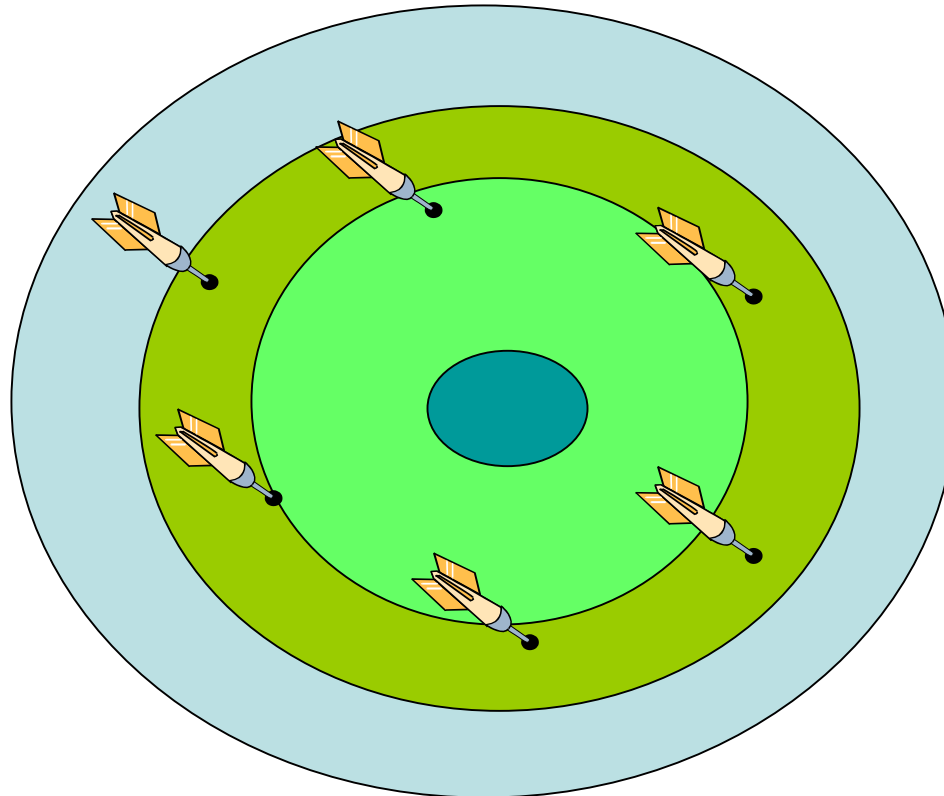
$$Cpk = \min (Cpks ; Cпки)$$

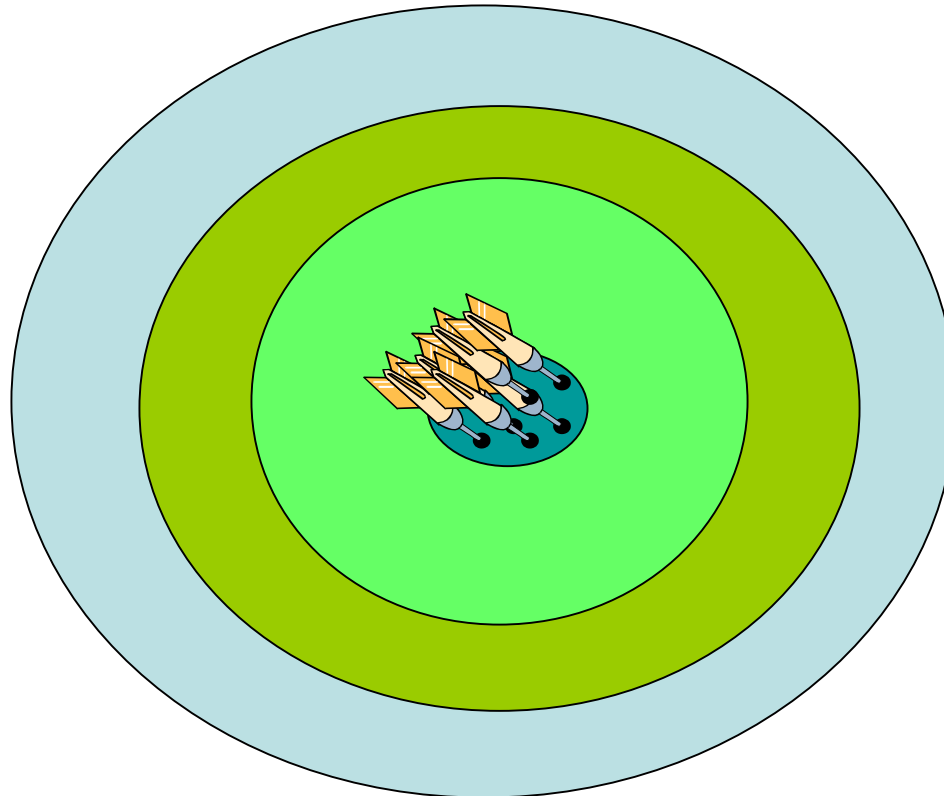


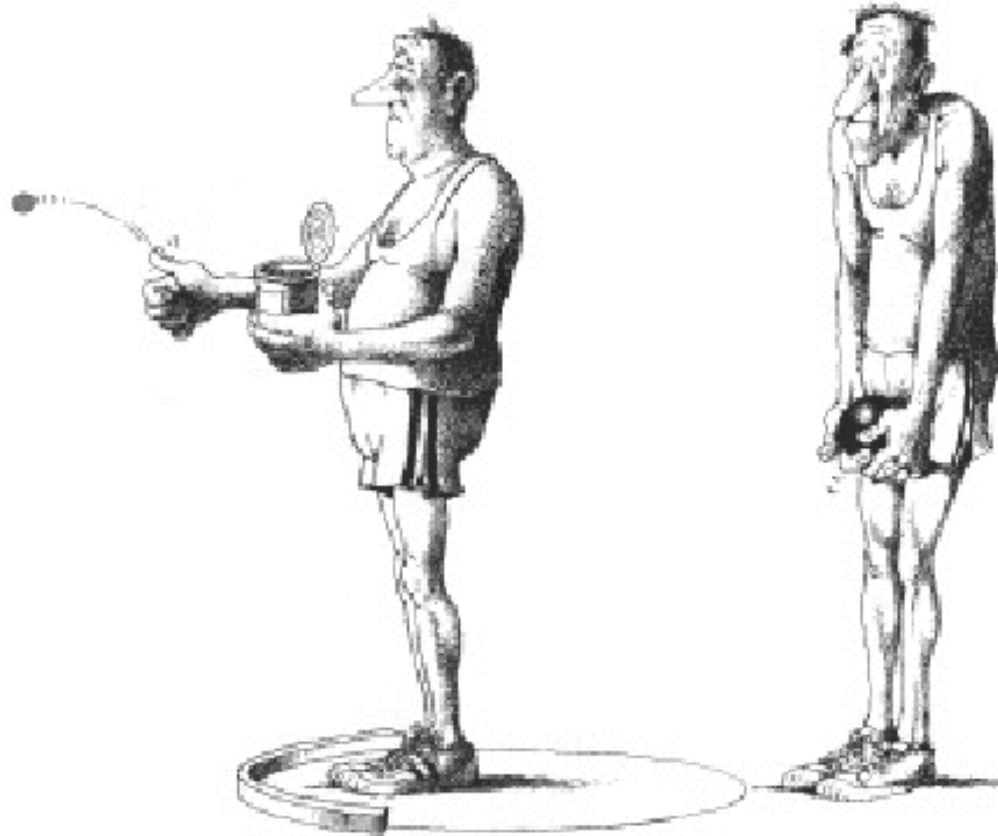
La maîtrise de notre processus est donc caractérisée par deux indices:

- ↗  $C_p / P_p$ : Indice de dispersion (notion de sigma),
- ↗  $C_{pk} / P_{pk}$  : Indice de dispersion + centrage communément appelé indice de centrage (notion de moyenne et sigma)







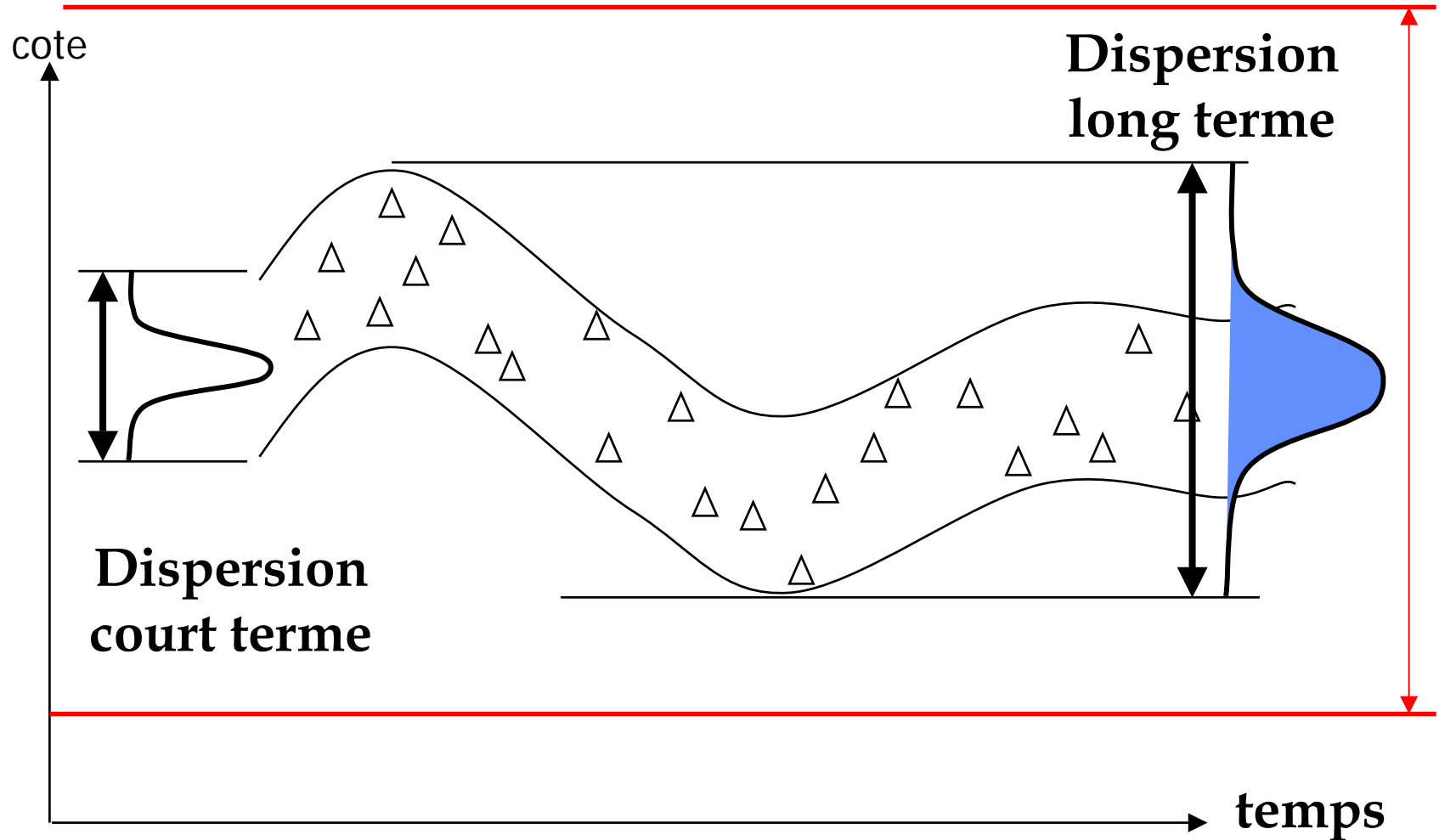


*Notion de capabilité selon Serre.*

- La notion de capabilité s'applique à différents niveaux,
- En qualification du process :
  - $C_p$  ;  $C_{pk}$  : Court terme
- En suivi continu d'un process qualifié :
  - $P_p$  ;  $P_{pk}$  : En continu pour le suivi long terme
- En qualification du moyen de contrôle

# Capabilité court terme

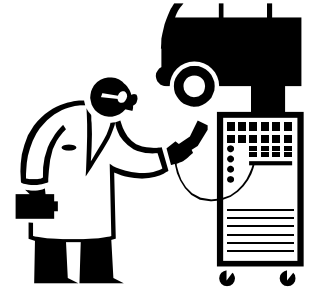
## Performance long terme



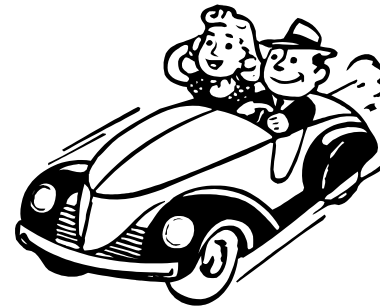
	Capabilité processus Cp ; Cpk	Performance Processus Pp ; Ppk
Mode de prélèvement	50 pièces en prélèvement <u>fractionné sur un délai court</u>	50 pièces mini réparties en prélèvement fractionné sur une série ou un lot délai plus long
Calcul de la moyenne	$\bar{X}$	$\bar{\bar{X}}$
Écart type	$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$	$S = \sqrt{\frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{n-1}}$



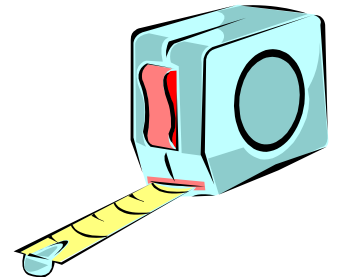
Capabilité processus :  $C_p$  &  $C_{pk} \geq 1.67$

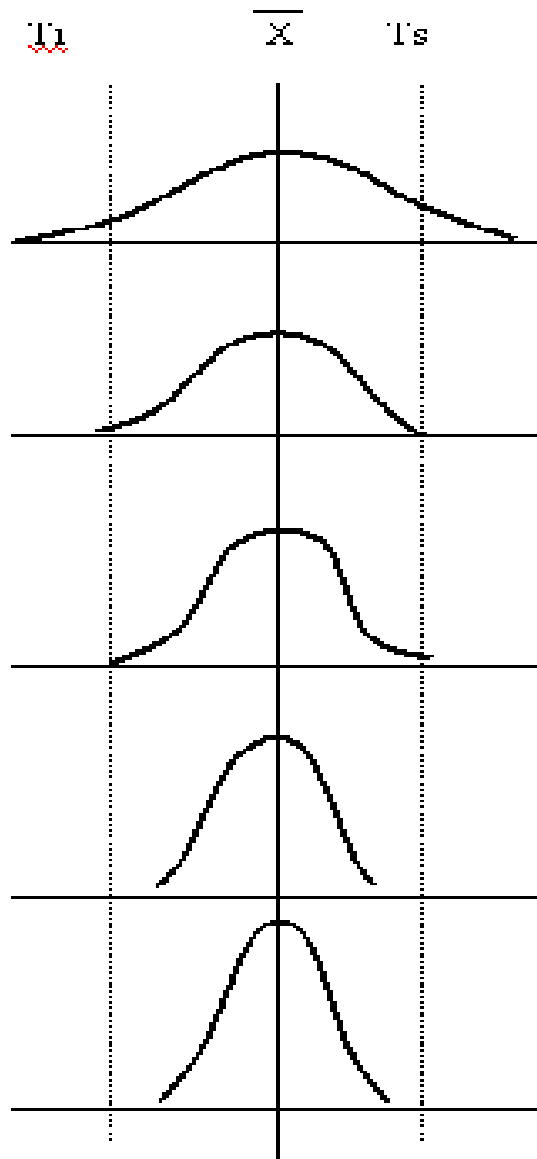


Performance processus :  $P_p$  &  $P_{pk} \geq 1.33$



Capabilité moyen de contrôle :  $C_{mc} \geq 4$





CAPA < 1 PROCESSUS NON CAPABLE.

CAPA = 1 PROCESSUS JUSTE CAPABLE

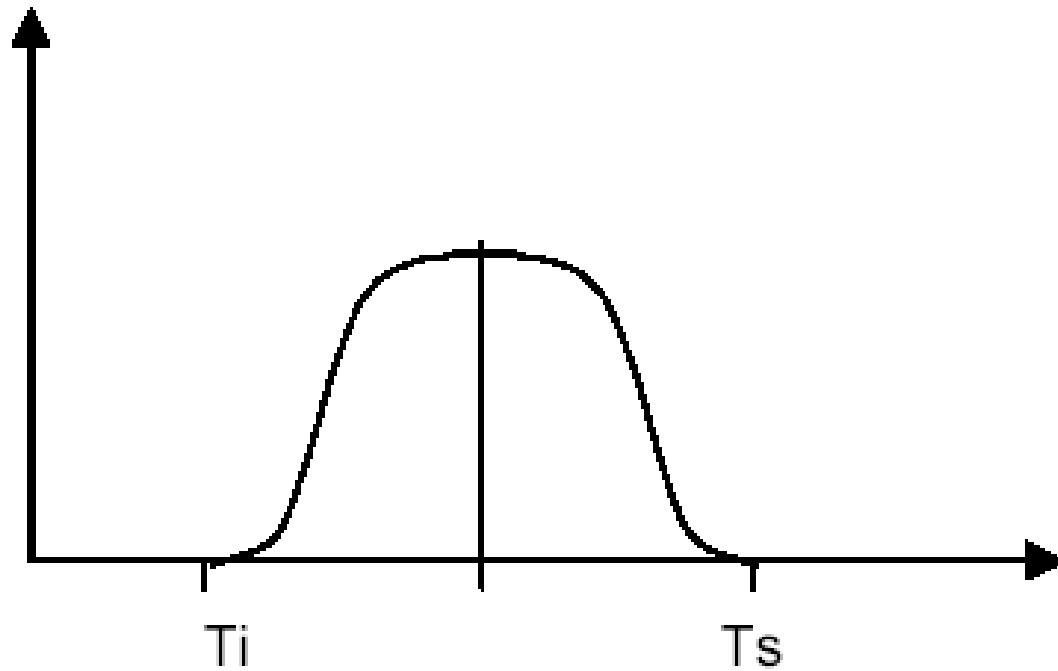
CAPA = 1.33 PROCESSUS CAPABLE

CAPA = 1.67 PROCESSUS FORT CAPABLE

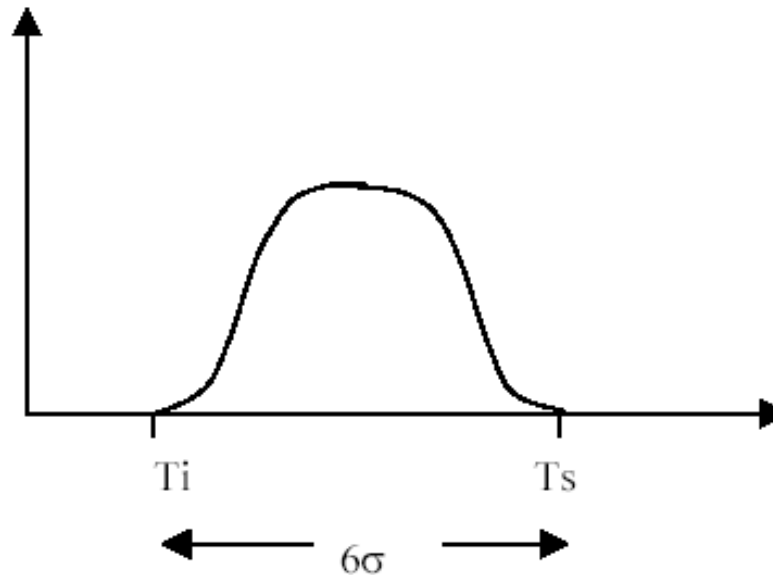
CAPA > 2 PROCESSUS TRES FORT CAPABLE

|

**Cas 1 :**



## Réponses Cas 1 :



Dans le premier cas, l'intervalle de tolérance est égal à la dispersion totale des pièces (on considère que  $6\sigma$  représentent la totalité des pièces à 2 pour 1000 près).

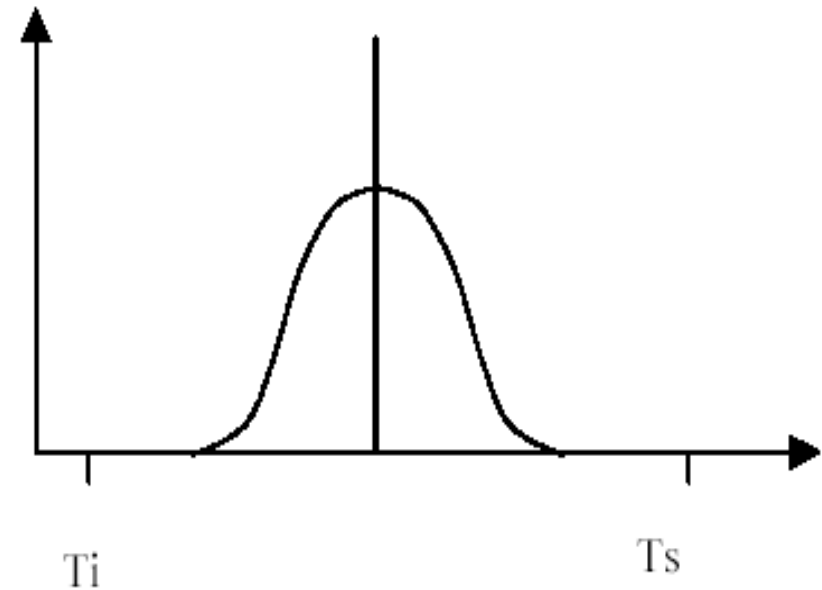
La machine n'est pas capable car le moindre dérèglement provoque la production de pièces non-conformes.

## Cas 2 :

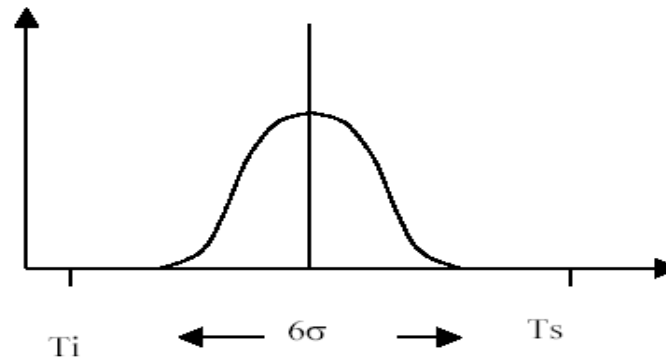
La cote à réaliser est de  $10 \pm 0,48$  mm

L'écart-type estimé est de 0,12mm

La moyenne est de 10 mm



Réponses Cas 2 :



Calcul de **Cp** et **Cpk**:

$$Cp = \frac{Ts - Ti}{6\sigma} = \frac{10,48 - 9,52}{6 \times 0,12} = \frac{0,96}{0,72} = 1,33$$

$$Cpk = \min imum \left[ \frac{\bar{X} - Ti}{3\sigma}; \frac{Ts - \bar{X}}{3\sigma} \right] = \min \left[ \frac{10 - 9,52}{3 \times 0,12}; \frac{10,48 - 10}{3 \times 0,12} \right] = 1,33$$

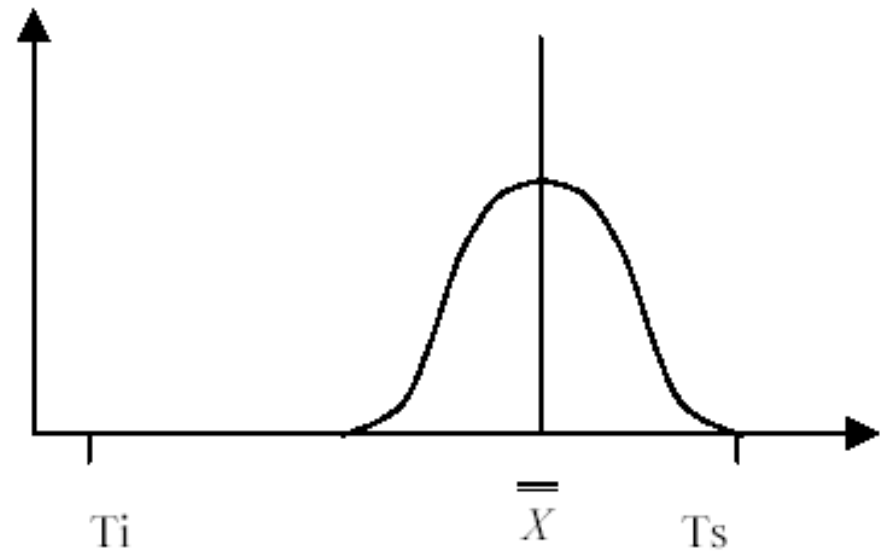
La machine est capable et elle est bien réglée : elle peut être mise sous contrôle.

## Cas 3 :

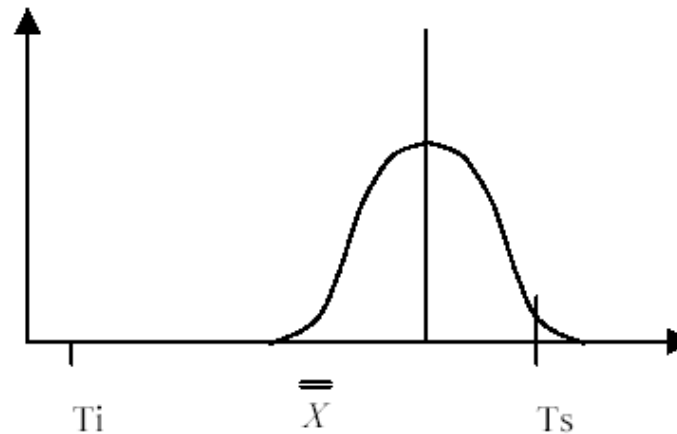
La cote à réaliser est de  $10 \pm 0,48$  mm

L'écart-type estimé est de 0,12mm

La moyenne est de 10,24 mm



## Réponses Cas 3 :



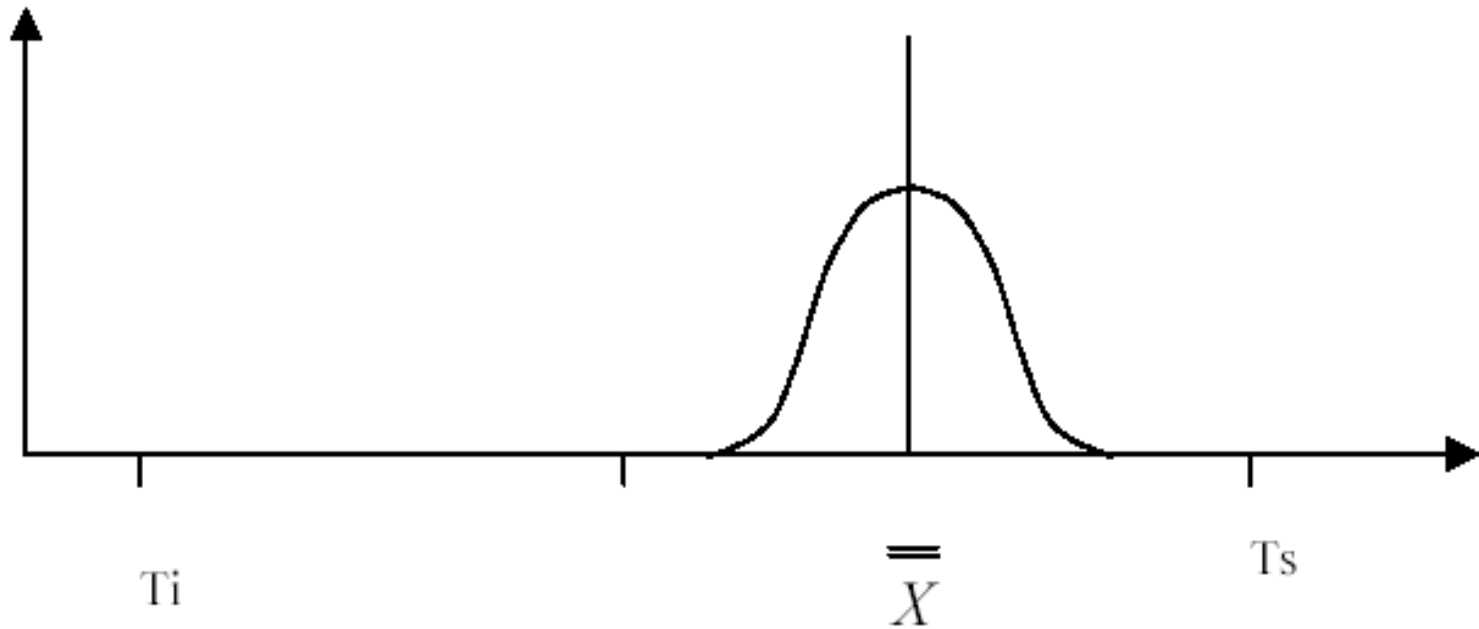
Dans le troisième cas, la machine est capable mais pas bien réglée : il faut donc régler la machine.

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6\sigma} = \frac{10,48 - 9,52}{6 \times 0,12} = \frac{0,96}{0,72} = 1,33$$

$$C_{pk} = \min \left[ \frac{\bar{X} - T_i}{3\sigma}; \frac{T_s - \bar{X}}{3\sigma} \right] = \min \left[ \frac{10,24 - 9,52}{3 \times 0,12}; \frac{10,48 - 10,24}{3 \times 0,12} \right] = 0,66 < 1,33$$



## Cas 4 :



La cote à réaliser est de  $10 \pm 1$  mm

L'écart-type estimé est de 0,12mm

La moyenne est de 10,24 mm

## Réponses Cas 4 :

Dans le dernier cas, la machine, au vu des deux premiers indices, est bien réglée et bien centrée.

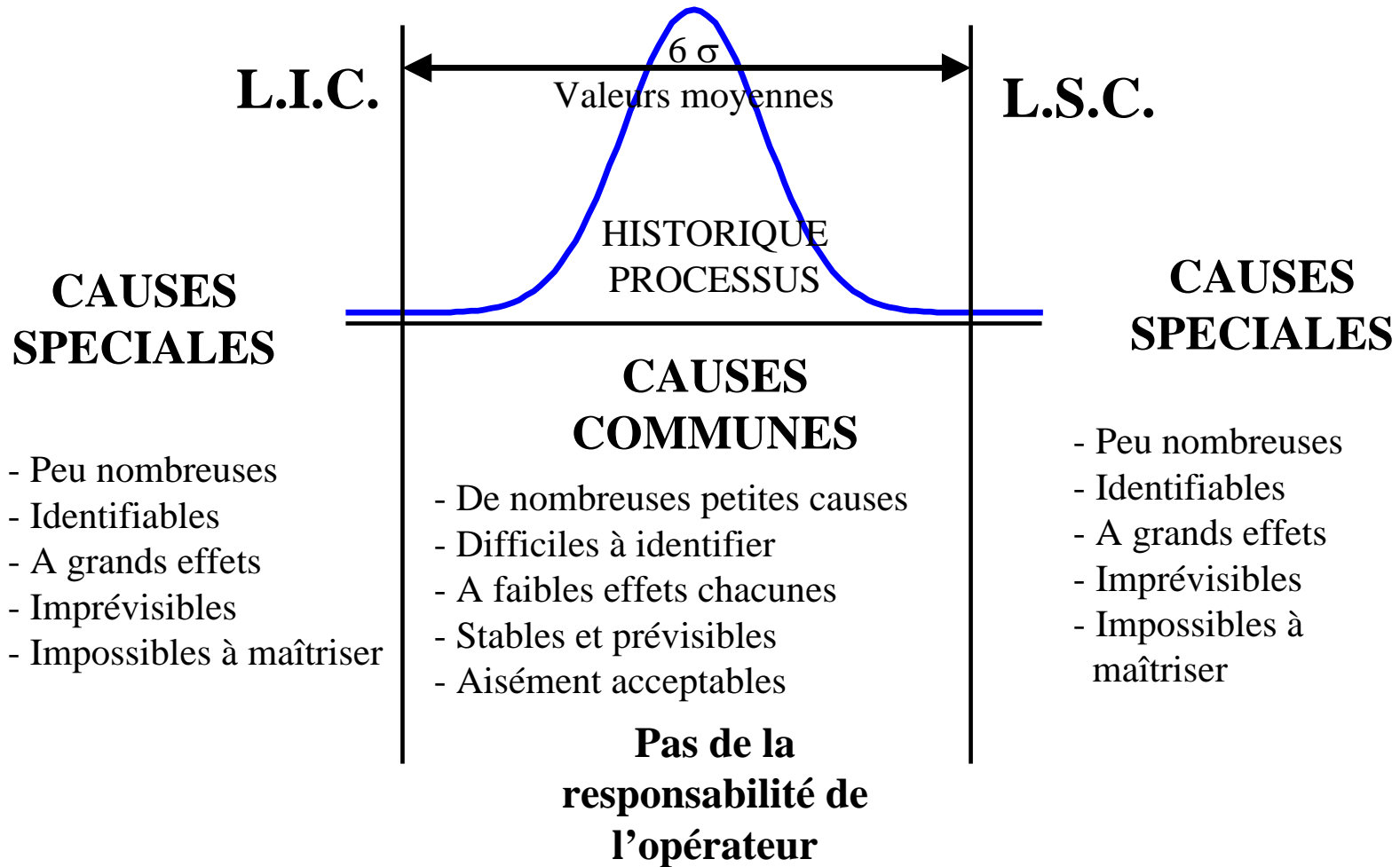
Calcul de **Cp** et **Cpk**

$$C_p = \frac{T_s - T_i}{6\sigma} = \frac{11 - 9}{6 \times 0,12} = \frac{2}{0,72} = 2,77$$

$$C_{pk} = \min \left[ \frac{\bar{X} - T_i}{3\sigma}; \frac{T_s - \bar{X}}{3\sigma} \right] = \min \left[ \frac{10,24 - 9}{3 \times 0,12}; \frac{11 - 10,24}{3 \times 0,12} \right] = 2,11 \geq 1,33$$

# Causes Communes

# Causes Spéciales



Sources (5M)	Causes communes	Causes spéciales
Main d'œuvre		
Machine		
Matières		
Méthodes		
Milieu		

**Exemple en entreprise**

**Exemple du trajet  
En voiture**

- **Dispersion instantanée  $\sigma$  (court terme) :**

Quantifie l'effet des causes communes à manifestation permanente :

- incertitude des moyens de mesure,
- légère instabilité des technologies machine,
- vibrations permanentes,
- hétérogénéité de la matière,

- **Dispersion process S (long terme) :**

Quantifie les effets cumulés de toutes les causes communes et des causes spéciales

# Limites de contrôle et de surveillance

- **Objectif des limites :**

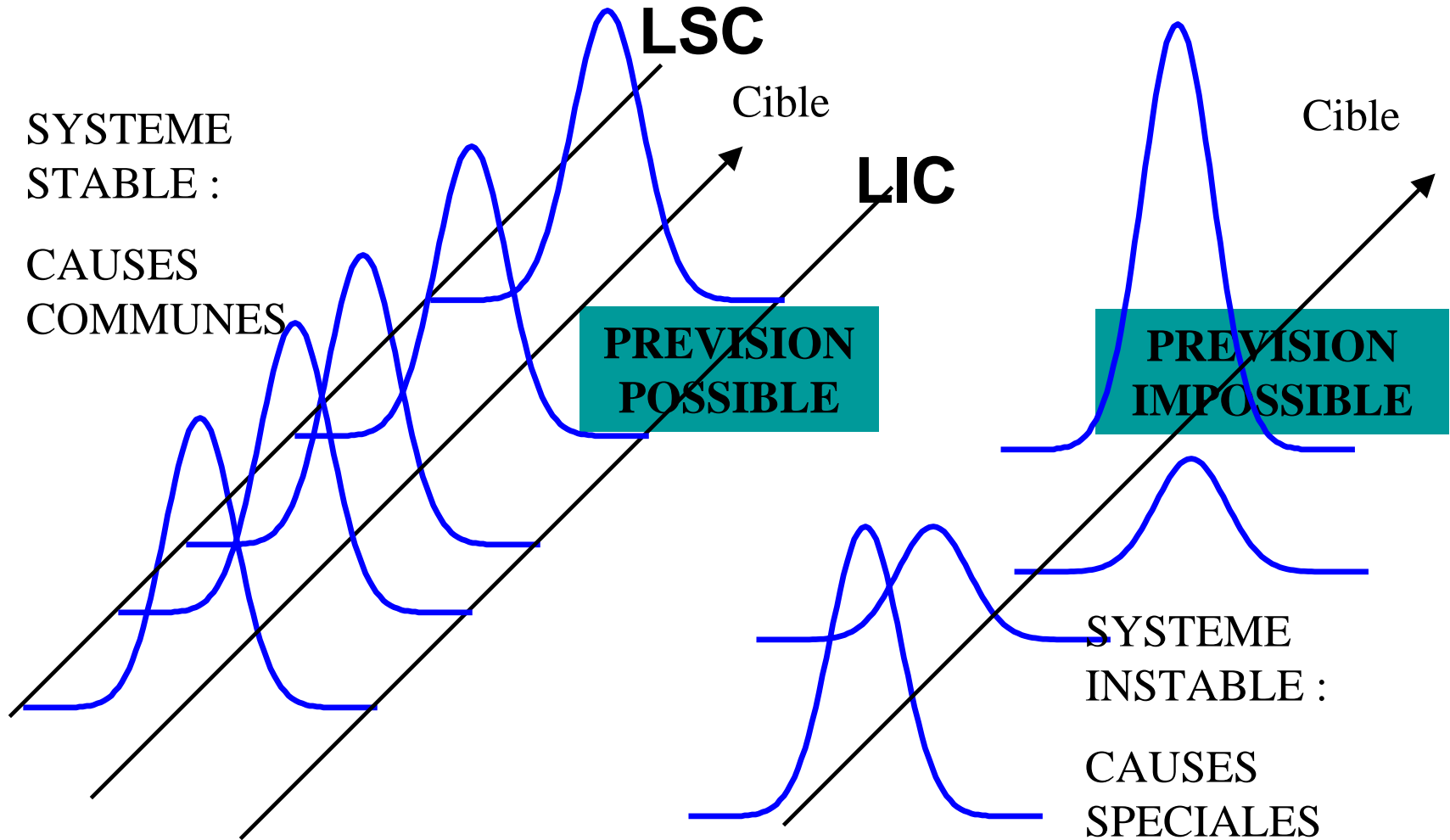
Nous avertir d'un dérèglement du processus, c'est-à-dire qu'une cause assignable a modifié le centrage (moyenne) ou la dispersion instantanée (étendue ou écart-type)

- **Principe des limites :**

Délimiter le domaine de variation de la moyenne et de l'étendue (écart-type) lorsque le processus est stable.

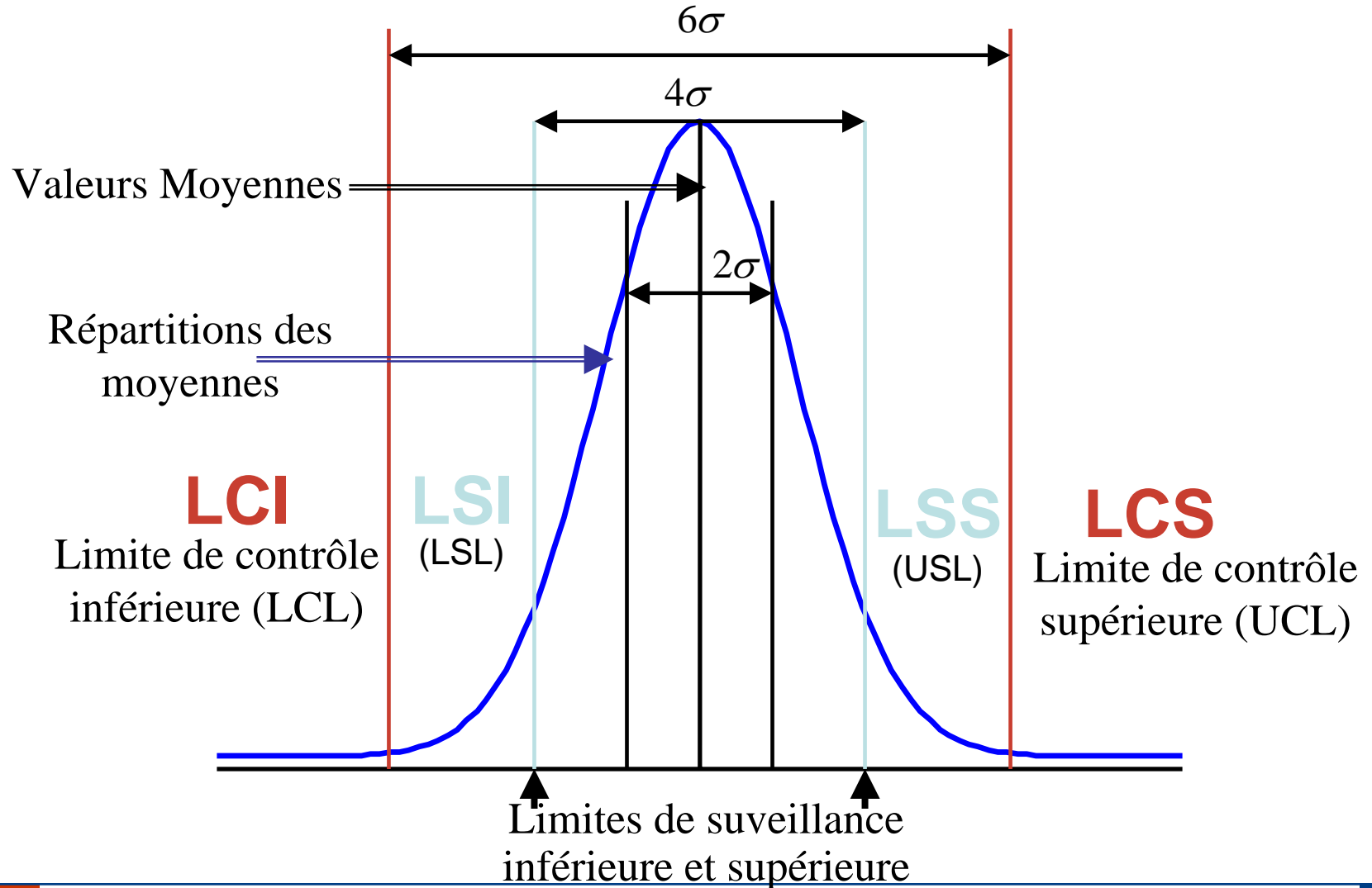
Une sortie de ce domaine nous signifie un dérèglement





## Nota bene :

1. L'information de dérèglement n'est pas fiable à 100%,
2. Les limites sont calculées pour un niveau de confiance de :
  - 99.73 % : limites de contrôle
  - 95.44 % : limites de surveillance
3. « Il y a 99.73 % de chances pour que la moyenne (l'écart-type instantané) de la Loi Normale ait été modifiée si celle-ci sort des limites de contrôle »
4. Cette probabilité est réduite à 95.44 % dans le cas des limites de surveillance



# Limites de contrôle et de surveillance

## Pour la carte des moyennes

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\Sigma \bar{X}}{n} \quad \bar{R} = \frac{\Sigma R}{n} \quad n = \text{nombre de prélèvements}$$

Limite de contrôle

$$LCS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\sigma_i}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \left[ \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \right] \bar{R}$$

$$LCS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$LCI_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$$

Limite de surveillance

$$LSS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 2 \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{2}{3} A_2 \bar{R}$$

$$LSI_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - \frac{2}{3} A_2 \bar{R}$$

- L'étendue est bornée par la valeur 0 et ne suit pas une loi Normale,
- Les limites des domaines de variation à 99 % de confiance sont données par :

Limite de contrôle supérieure :  $LSC_R = D_4 \bar{R}$

Limite de surveillance supérieure :  $LSS_R = D'_4 \bar{R}$

**Lorsque les points reportés sur la carte sont répartis de manière aléatoire, à l'intérieur des limites de contrôle :**



**Le processus est stable**

- Causes spéciales éliminées
- Système de causes communes

**Le SPC devient possible**

**Nous pouvons calculer la capabilité du processus**

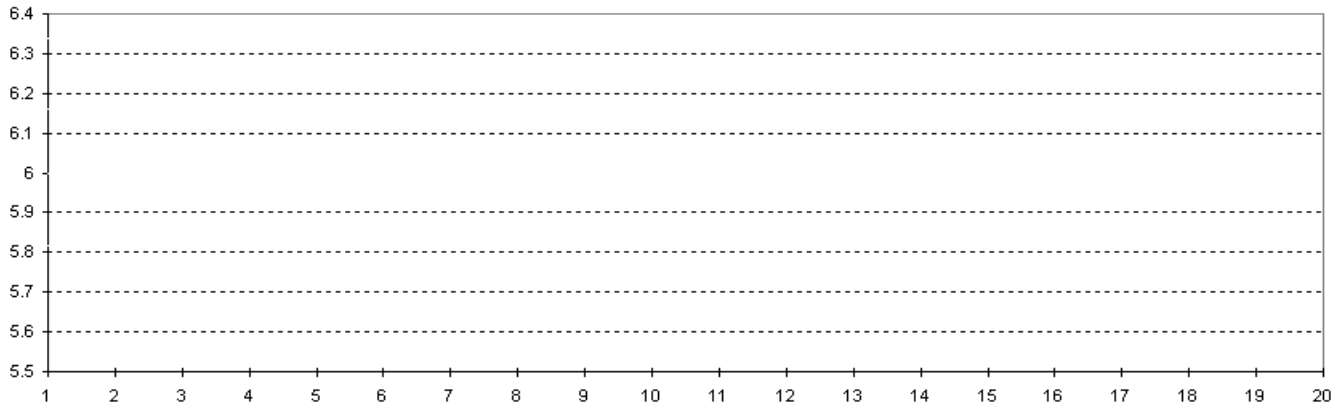
# EXERCICE 1

## SUITE

## Suivi statistique par carte X/R

Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Caractéristique suivie :	Longeur				
X1	6.2	5.7	6.1	6	5.8	5.9	5.7	5.9	6.2	6.4												Maxi toléré : TS				
X2	5.9	6.2	5.9	6	6.2	6.3	5.9	6.2	6.1	6.2													Mini toléré : TI			
X3	5.8	6.4	6.1	6.3	6.2	6.1	5.7	6.1	6	6.2													Tolérance : IT			
X4	6.5	6.3	6	6.1	6.2	5.9	6.3	6.1	5.9	6.1														Valeur nominal		
X5	6.4	6	5.9	6	6.4	6	6	6.1	6	6														Taille échantillon : n		
X6																									Etendue Moyenne	
Moyenne																									Moyenne des Moyennes :	
Etendue																										

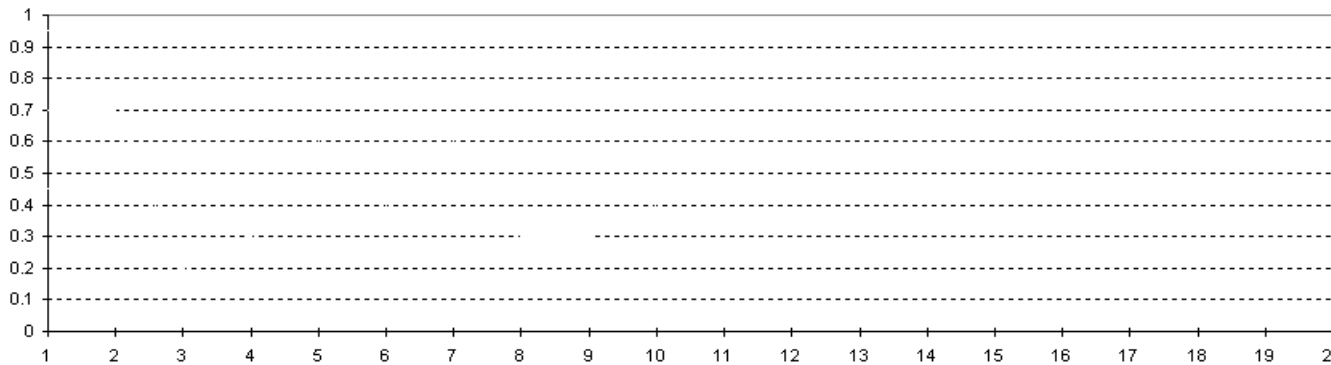
Carte des moyennes



Moyenne  
Limite Sup  
Limite Inf  
Cible

d2	
D4	
D3	
A2	
Limites moyennes	
LSC	
LIC	
Limites étendues	
LSC r	
Lic r	
Capabilité Process	
Cp	
CpKs	
CpKi	

Carte des Etendues



Etendue  
Limite sup  
Etendue  
Moyen  
Limite inf



$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{n} \longrightarrow \bar{\bar{X}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots} =$
$\bar{\bar{R}} = \frac{\sum R}{n} \longrightarrow \bar{\bar{R}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots} =$

$$LSC_x = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

$$LSC_R = D_4 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

$$LIC_x = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

$$LIC_R = D_3 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

n = nombre de prélèvements

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{n} \longrightarrow \bar{\bar{X}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots} = 6.078$
$\bar{\bar{R}} = \frac{\sum R}{n} \longrightarrow \bar{\bar{R}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots} = 0.45$

$$LSC_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots 6,34$$

$$LIC_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots 5,82$$

$$LSC_R = D_4 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots 0,95$$

$$LIC_R = D_3 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots 0$$

↗ n = nombre de prélèvements

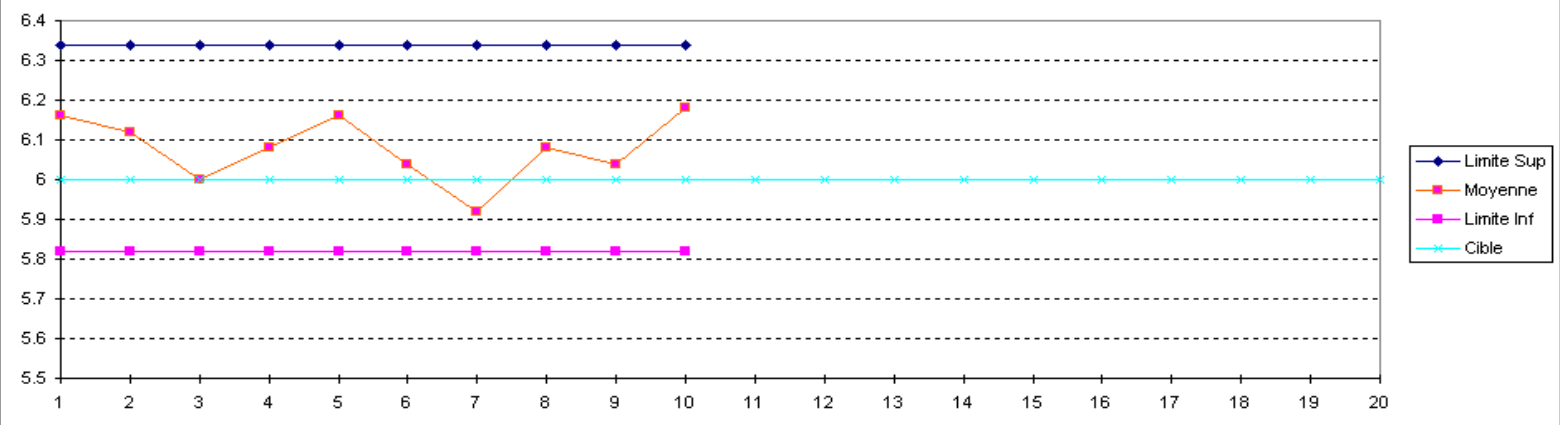
# Carte Moyennes / Etendues

Suivi statistique par carte X/R

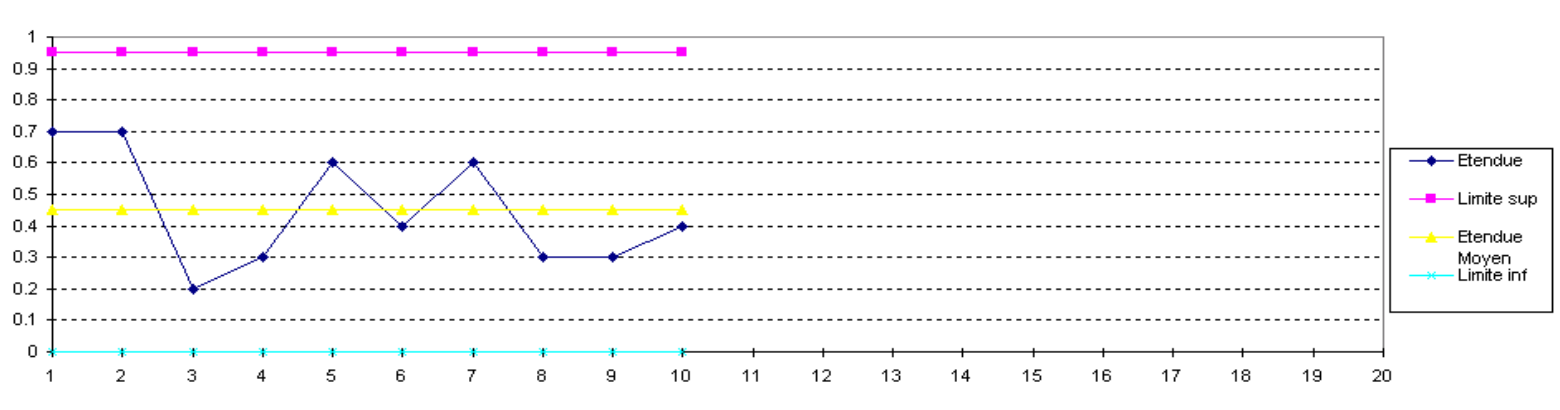
Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
X1	6.2	5.7	6.1	6	5.8	5.9	5.7	5.9	6.2	6.4											
X2	5.9	6.2	5.9	6	6.2	6.3	5.9	6.2	6.1	6.2											
X3	5.8	6.4	6.1	6.3	6.2	6.1	5.7	6.1	6	6.2											
X4	6.5	6.3	6	6.1	6.2	5.9	6.3	6.1	5.9	6.1											
X5	6.4	6	5.9	6	6.4	6	6	6.1	6	6											
X6																					
Moyenne	6.160	6.120	6.000	6.080	6.160	6.040	5.920	6.080	6.040	6.180											
Etendue	0.7	0.7	0.2	0.3	0.6	0.4	0.6	0.3	0.3	0.4											

Caractéristique suivie :	Longueur
Maxi toléré : TS	6.7
Mini toléré : TI	5.3
Tolérance : IT	1.4
Valeur nominal	6
Taille échantillon : n	5
Etendue Moyenne	0.45
Moyenne des Moyennes :	6.078
sigma	0.19
d2	2.326
D4	2.114
D3	0
A2	0.577
Limites moyennes	
LSC	6.33765
LIC	5.81835
Limites étendues	
LSC r	0.9513
Lic r	0
Capabilité Process	
Cp	1.20607
CpKs	1.07168
CpKi	1.34047

Carte des moyennes



Carte des Etendues



## Types de réactions par rapport aux différents constats

- **Valeurs initiales des limites :**

Valeurs calculées avec les prélèvements effectués lors de l'étude de capabilité et de stabilité, une fois le processus rendu capable et stable. Ces valeurs sont reportées sur la première carte.

- **Se demander ensuite à chaque recalcul des capabilités :**

**Les valeurs de capabilité ont-elles significativement changé ?**

**(variation supérieure à 10%)**

- Si oui, recalculer les limites avec les valeurs (moyenne, écart-type) utilisées pour le calcul des capabilités,
- Si non, conserver les limites précédemment calculées.

Reporter les valeurs à jour des limites sur la carte suivante (ou à la fin de la carte)

**Des points hors contrôle ont été identifiés  
comme causes spéciales, et supprimés de la  
carte car non représentatifs du comportement  
normal du processus**

## Utilisation de la carte et des limites :

### Plan de réaction en temps réel

- Ce plan est applicable lorsque le processus a été préalablement rendu capable ( $C_{pk} > 1.33$ ) et stable (absence de causes assignables, ou faible différence entre  $C_{pk}$  et  $P_{pk}$ )
- En cas de point hors limite, il convient, avant d'appliquer le plan de réaction, de regarder s'il ne s'agit pas d'une erreur (lecture, calcul, report, mauvaise utilisation de l'instrument de mesure ... qui serait à l'origine d'une valeur aberrante)



**conserver les pièces tant que la décision n'est pas prise !**

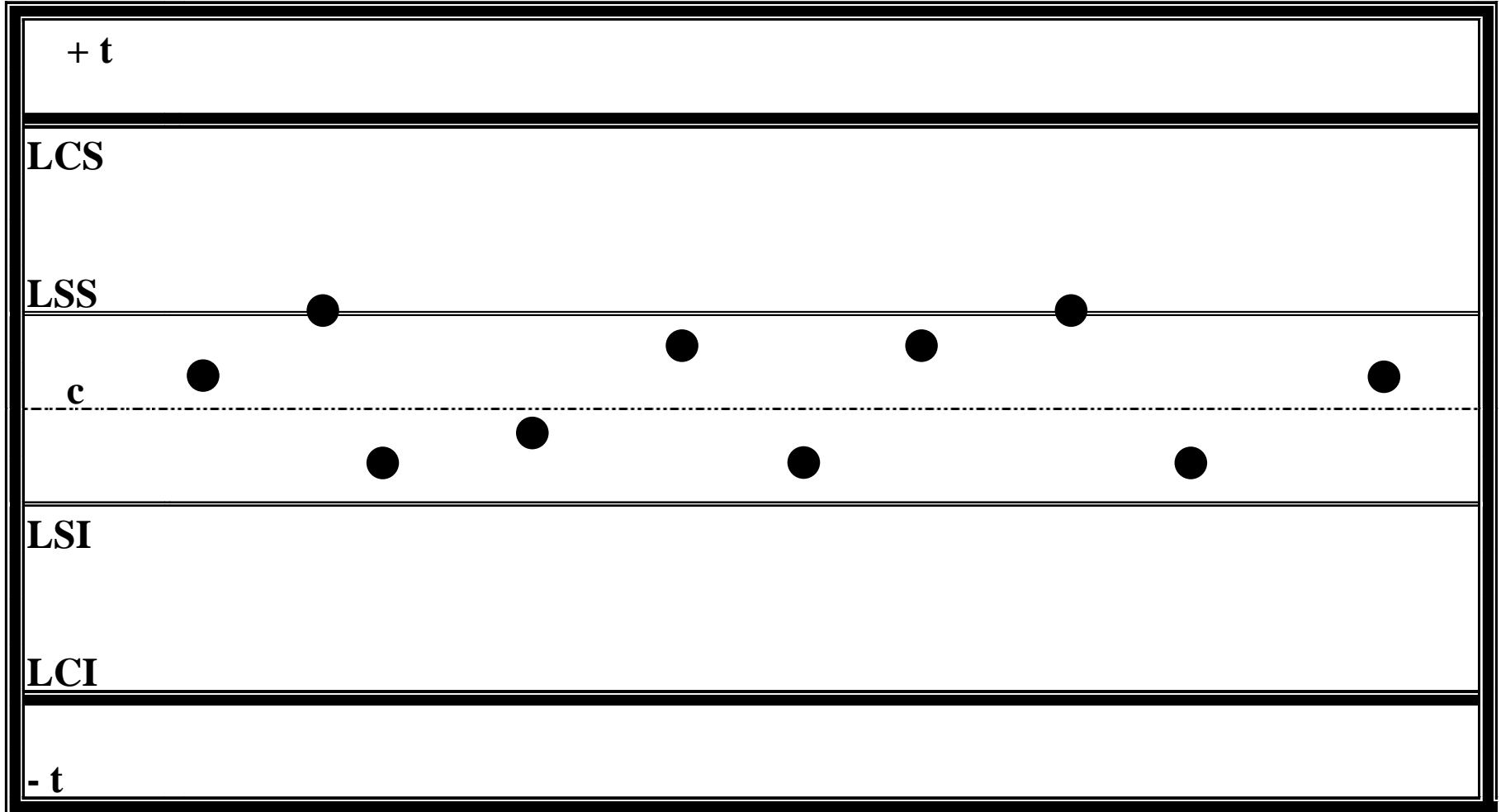
## Actions sur les sorties du procédé en continu

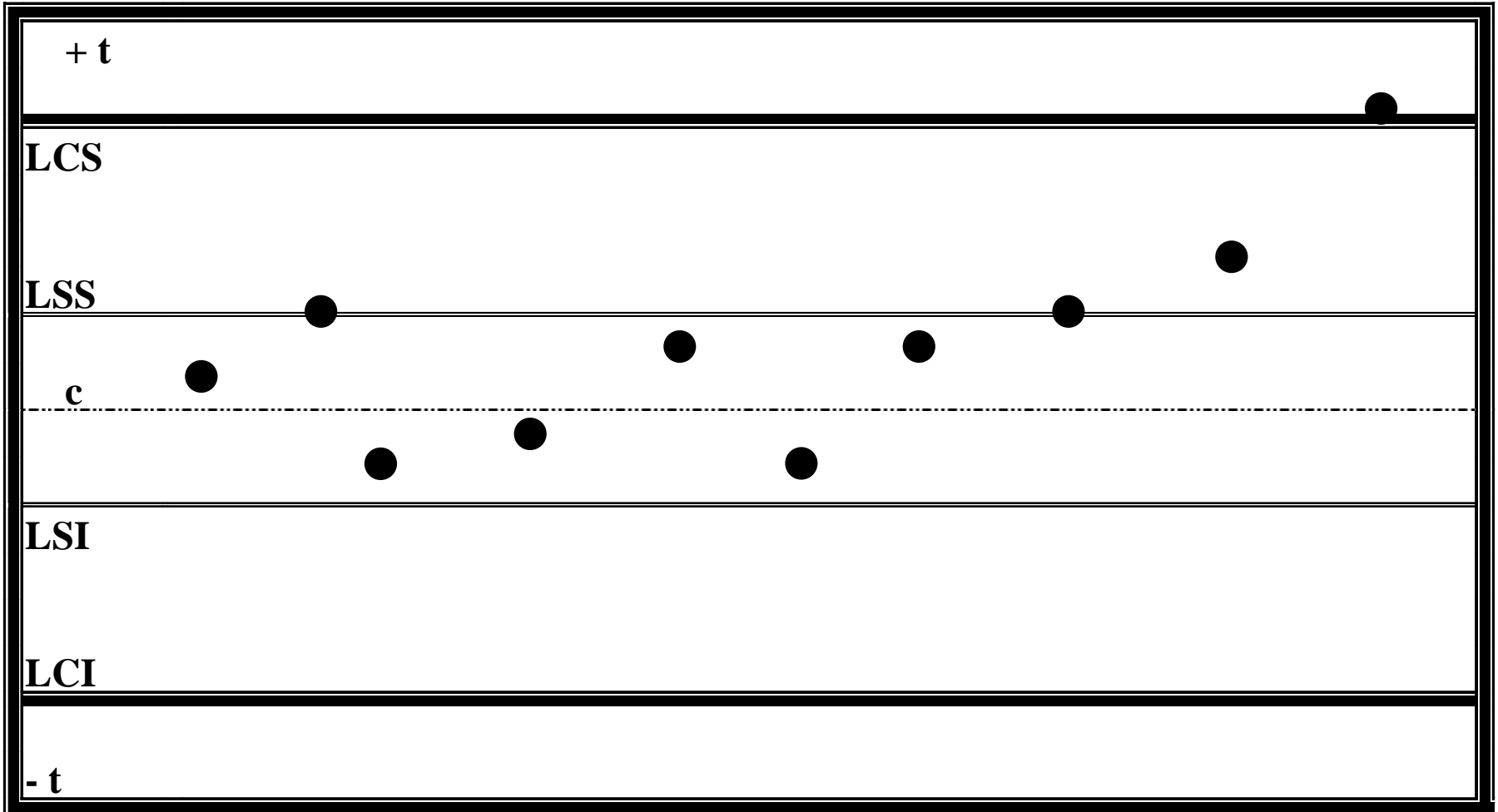
Le derniers points sur la carte de contrôle indiquent :

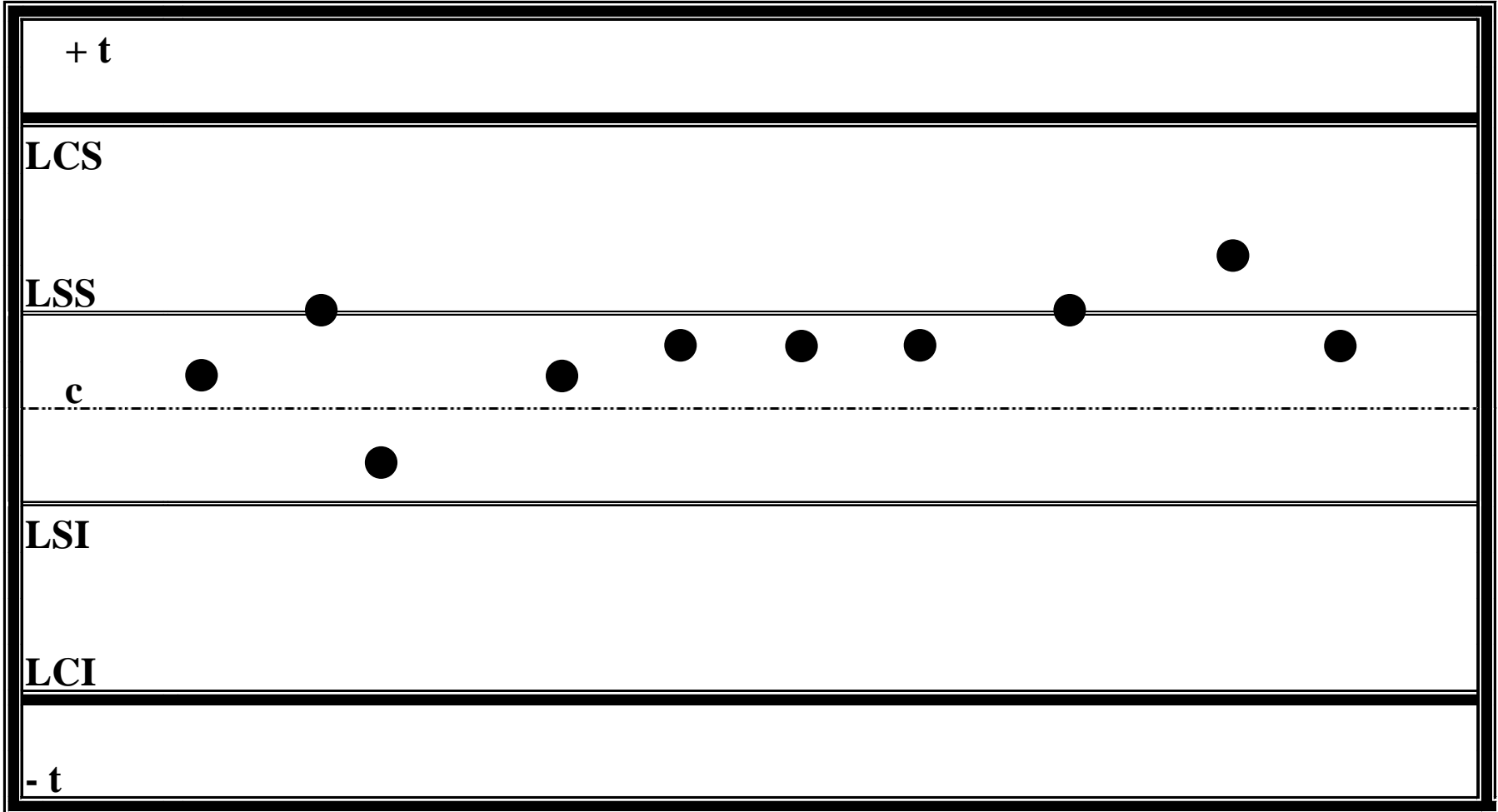


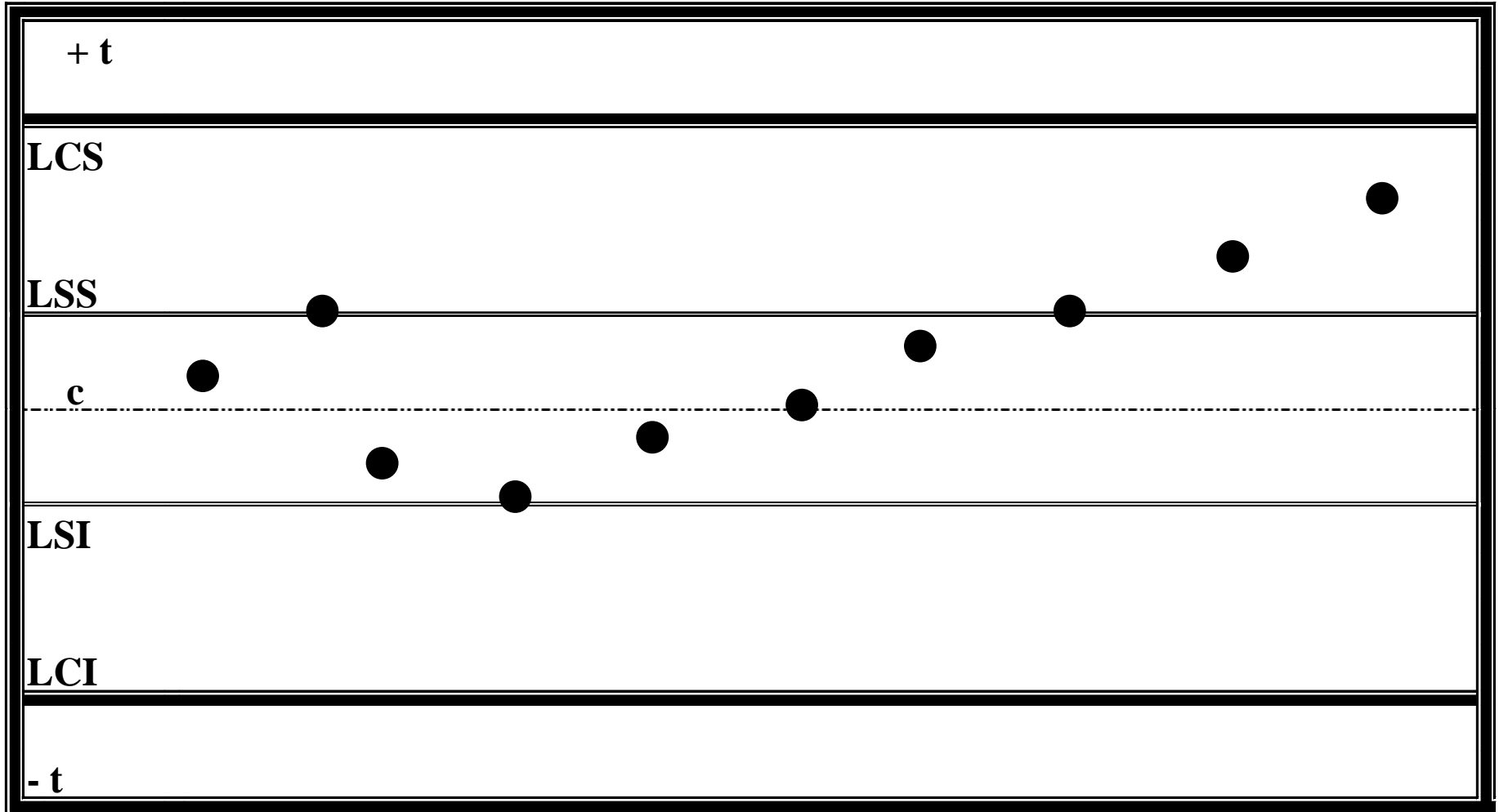
	Valeurs de Ppk d'après l'historique du procédé (cartes précédentes)		
	Inférieur à 1.33	De 1.33 à 1.67	Supérieur à 1.67
<b>Procédé Sous Contrôle</b>	<b>Contrôle unitaire 100%</b>	Accepter les pièces et continuer à réduire la variabilité du procédé	Accepter les pièces et continuer à réduire la variabilité du procédé
<b>Procédé Hors Contrôle</b> (dégradation) Mais toutes les pièces (valeurs individuelles) sont dans les tolérances.	<b>Identifier et corriger la ou les causes spéciales</b>		
	<b>Contrôle unitaire 100%</b>	Trier les composants fabriqués depuis le dernier prélèvement sous contrôle	Accepter les pièces et continuer à réduire la variabilité du procédé
<b>Procédé Hors Contrôle</b> (dégradation) et au moins une pièce (valeurs individuelles) sont hors tolérances	<b>Identifier et corriger la ou les causes spéciales</b>		
	<b>Contrôle unitaire 100%</b>	Trier les composants fabriqués depuis le dernier prélèvement sous contrôle	

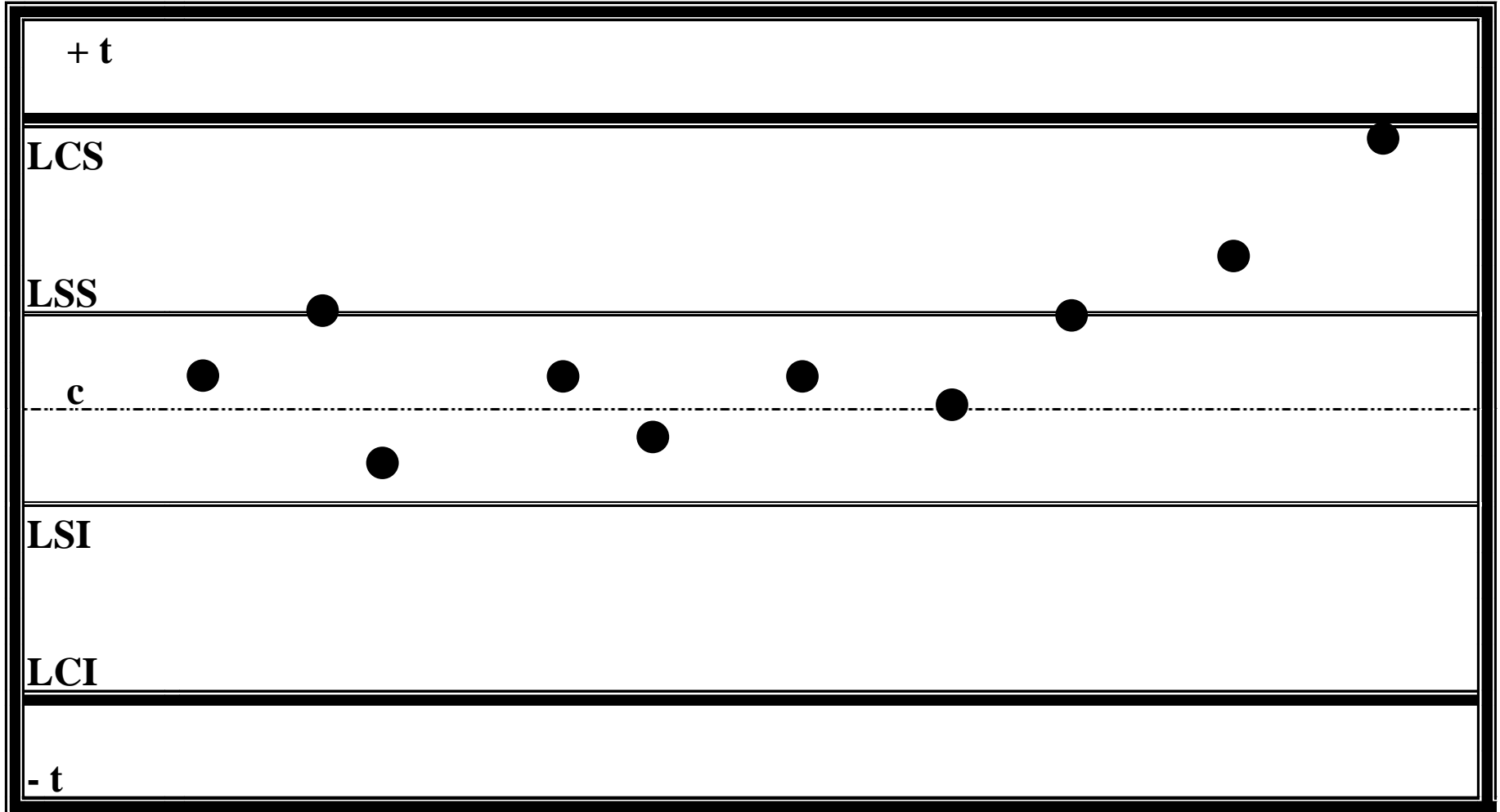




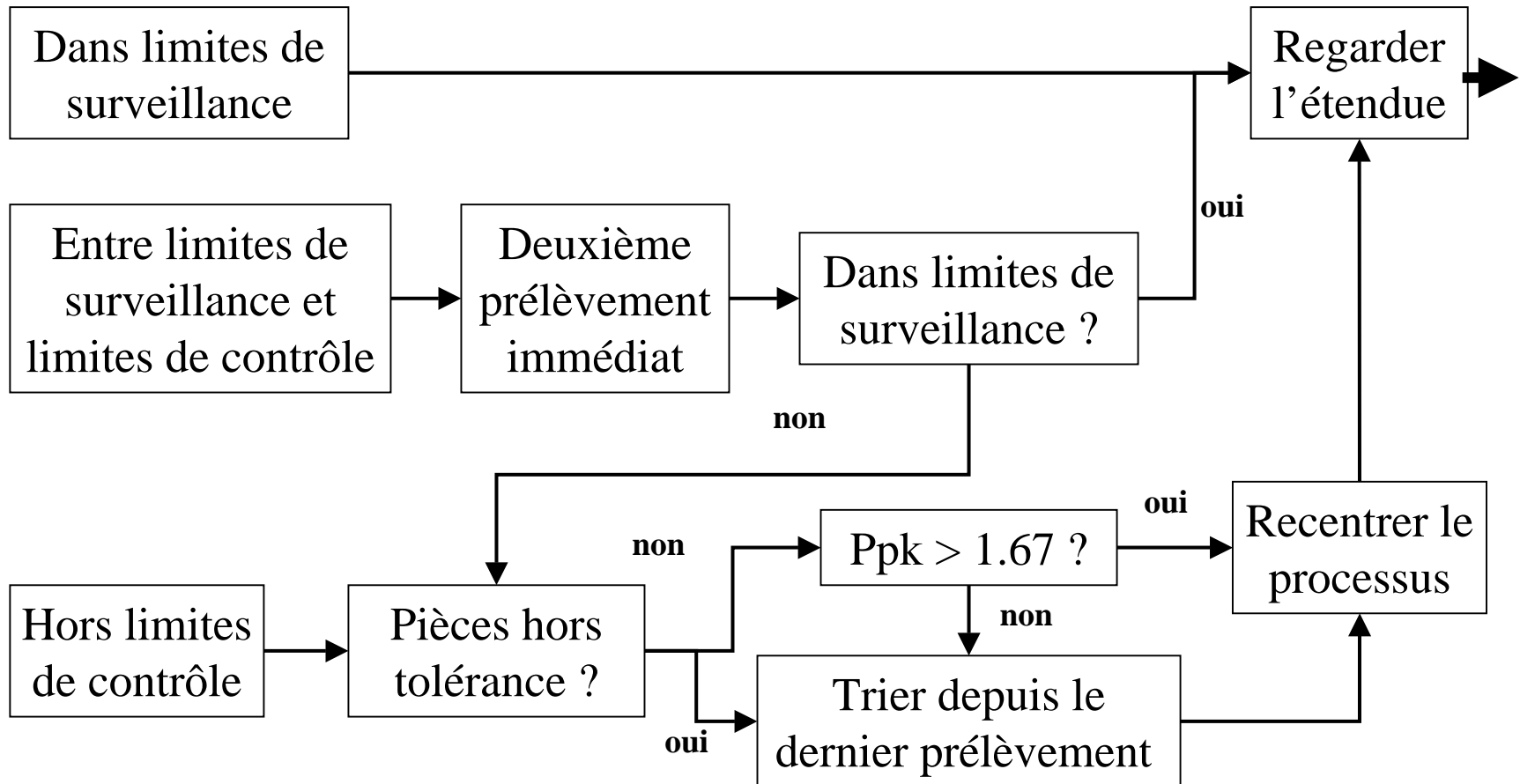




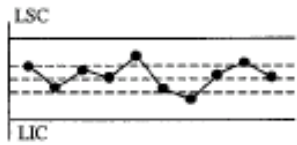
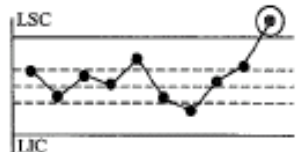
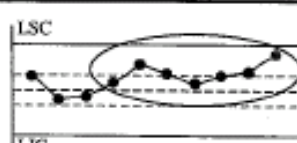
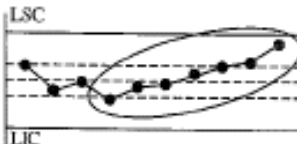
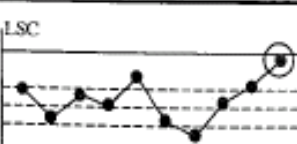




## 1. Examen de la moyenne

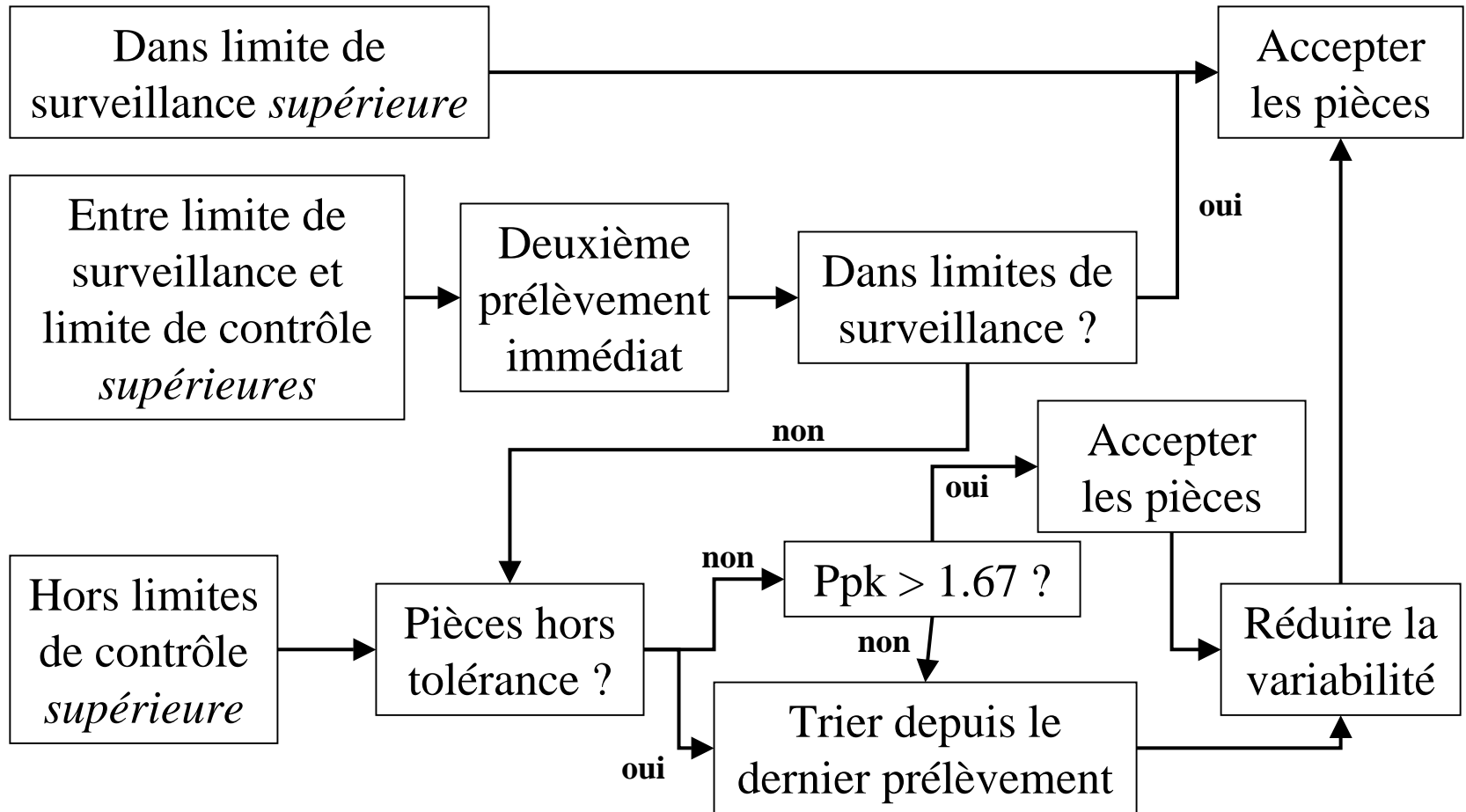


## Règles principales d'interprétation des cartes de pilotage

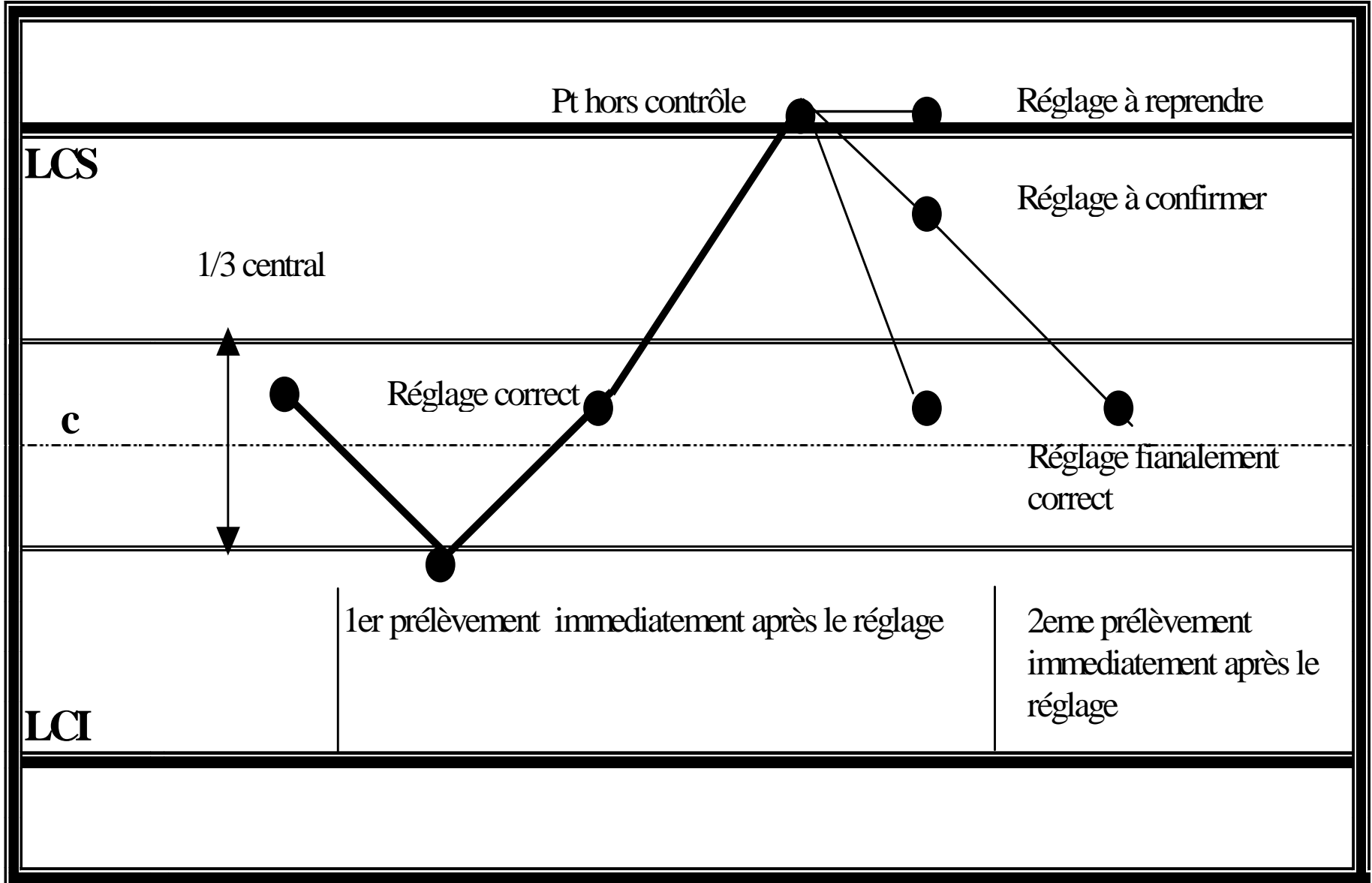
Graphique	Description	Décision carte des moyennes	Décision carte des étendues
	<p><b>Procédé sous contrôle</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Les courbes <math>\bar{X}</math> et R oscillent de chaque côté de la moyenne.</li> <li>2/3 des points sont dans le tiers central de la carte.</li> </ul>	<b>Production</b>	
	<p><b>Point hors limites</b></p> <p>Le dernier point tracé a franchi une limite de contrôle.</p>	<p><b>Régler le procédé</b></p> <p>de la valeur de l'écart qui sépare le point de la valeur cible.</p>	<p><b>Cas limite supérieure</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La capacité court terme se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir.</li> <li>Il y a une erreur de mesure.</li> </ul> <p><b>Cas limite inférieure</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La capacité court terme s'améliore.</li> <li>Le système de mesure est bloqué.</li> </ul>
	<p><b>Tendance supérieure ou inférieure</b></p> <p>7 points consécutifs sont supérieurs ou inférieurs à la moyenne.</p>	<p><b>Régler le procédé</b></p> <p>de l'écart moyen qui sépare la tendance à la valeur cible.</p>	<p><b>Cas tendance supérieure</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La capacité court terme se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir.</li> </ul> <p><b>Cas tendance inférieure</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La capacité court terme s'améliore. Il faut trouver l'origine de cette amélioration pour la maintenir.</li> </ul>
	<p><b>Tendance croissante ou décroissante</b></p> <p>7 points consécutifs sont en augmentation régulière, ou en diminution régulière.</p>	<p><b>Régler le procédé</b></p> <p>si le dernier point approche les limites de contrôle de l'écart qui sépare le dernier point à la valeur cible.</p>	<p><b>Cas série croissante</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La capacité court terme se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir.</li> </ul> <p><b>Cas série décroissante</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La capacité court terme s'améliore. Il faut trouver l'origine de cette amélioration pour la maintenir.</li> </ul>
	<p><b>1 point proche des limites</b></p> <p>Le dernier point tracé se situe dans le 1/6 au bord de la carte de contrôle.</p>	<p><b>Confirmer</b></p> <p>en prélevant immédiatement un autre échantillon. Si le point revient dans le tiers central - production Si le point est également proche des limites ou hors limites, régler de la valeur moyenne des deux points.</p>	<p><b>Cas limite supérieure</b></p> <p><b>Surveiller la capacité</b></p> <p>Si plusieurs points de la carte sont également proches de la limite supérieure, la capacité se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir.</p>

**En cas de réglage :** Un nouvel échantillon est mesuré et marqué sur la carte. Pour être acceptable, le point doit se situer dans le tiers central de la carte des moyennes.

## 2. Examen de l'étendue







# EXERCICE 2

La société bombeq fabrique et commercialise des bonbons.

Produit . X06 : Figurines acidulées

Ligne . As2

Spécification . 20,0 +/- 1,0 g

Construire la carte moyennes / étendues selon les éléments connus jusqu'à cet instant.

Construction de la cartes des moyennes et de la cartes des étendues.

Calcul et re-calcul des limites si nécessaire.

Exploitation du journal.

Règles de réaction en temps réel.

Sur la carte de contrôle page suivante :

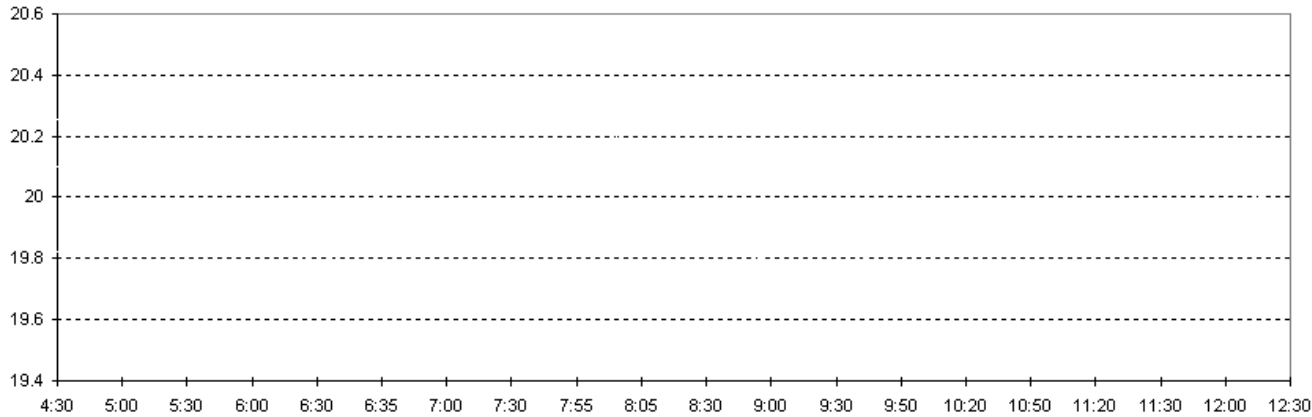
- ↗ Calculer les moyennes et étendues pour chaque prélèvement
- ↗ Calculer la moyenne
  - des moyennes
  - des étendues
- ↗ Calculer les limites
- ↗ Compléter les graphes

# Exercice 2 : Bombeq

## Suivi statistique par carte X/R

Date	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	6:35	7:00	7:30	7:55	8:05	8:30	9:00	9:30	9:50	10:20	10:50	11:20	11:30	12:00	12:30	Caractéristique suivie :	
X1	20.1	20	19.9	20.2	19.9	20	20.2	19.9	20.1	19.9	19.8	19.5	19.7	20.1	20	20.3	20.8	20.1	19.8	20	Maxi toléré : TS	
X2	20.3	20.2	20.3	20	19.5	19.9	20	20.3	20.7	19.9	20	20.1	19.6	19.9	19.9	20	20.2	19.9	19.9	20.1	Mini toléré : TI	
X3	20	20.1	20	20	20.1	20.1	20.1	20	20.3	20	19.9	19.8	19.7	20.1	20.2	20	20.5	20.2	19.9	20.1	Tolérance : IT	
X4	19.9	20.4	20.1	20.3	19.7	20	20	20.2	20.7	20.1	19.8	19.7	19.5	20	20.1	20	20	20.1	20	20	Valeur nominal	
X5	20.2	20.2	19.8	20	19.5	20.1	20.1	20	20.9	20	20	19.8	19.6	20.2	20	20	20.6	20.2	20.2	20	Taille échantillon : n	
X6																					Etendue Moyenne	
Moyenne	20.1	20.2	20.0	20.1	19.7	20.0	20.1	20.1	20.5	20.0											Moyenne des Moyennes :	
Etendue	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.2	0.2	0.4	0.8	0.2												

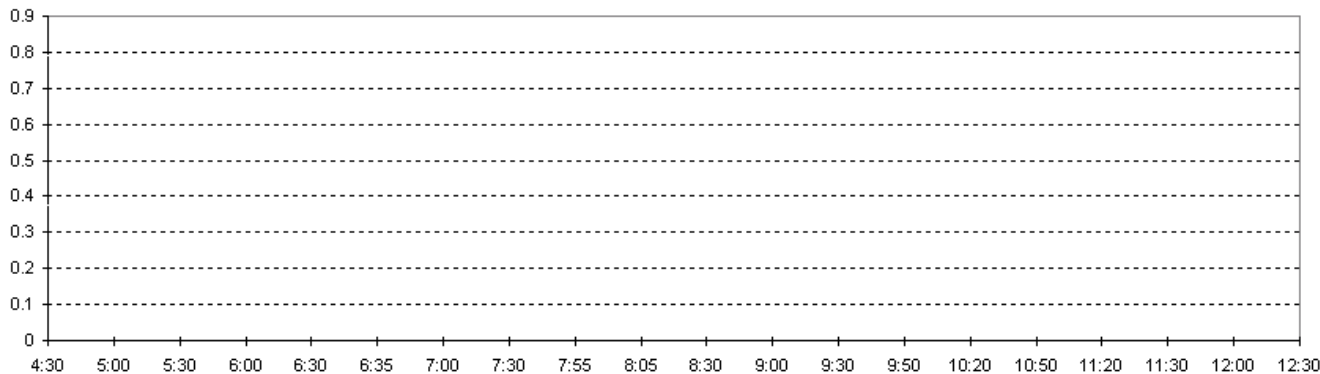
Carte des moyennes



Moyenne  
Limite Sup  
Limite Inf  
Cible

d2	
D4	
D3	
A2	
Limites moyennes	
LSC	
LIC	
Limites étendues	
LSC r	
Lic r	
Capabilité Process	
Cp	
CpKs	
CpKi	

Carte des Etendues



Etendue  
Limite sup  
Etendue Moyen  
Limite inf



## Exercice 2 : Bombeq

### Calcul des limites de surveillance

$$LSS_x = \bar{x} + \frac{2}{3} A_2 \bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LSS_x = \dots\dots\dots$$

$$LIS_x = \bar{x} - \frac{2}{3} A_2 \bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LIS_x = \dots\dots\dots$$

$$LSS_R = D'_4 \bar{R}$$

$$LSS_R = \dots\dots\dots$$





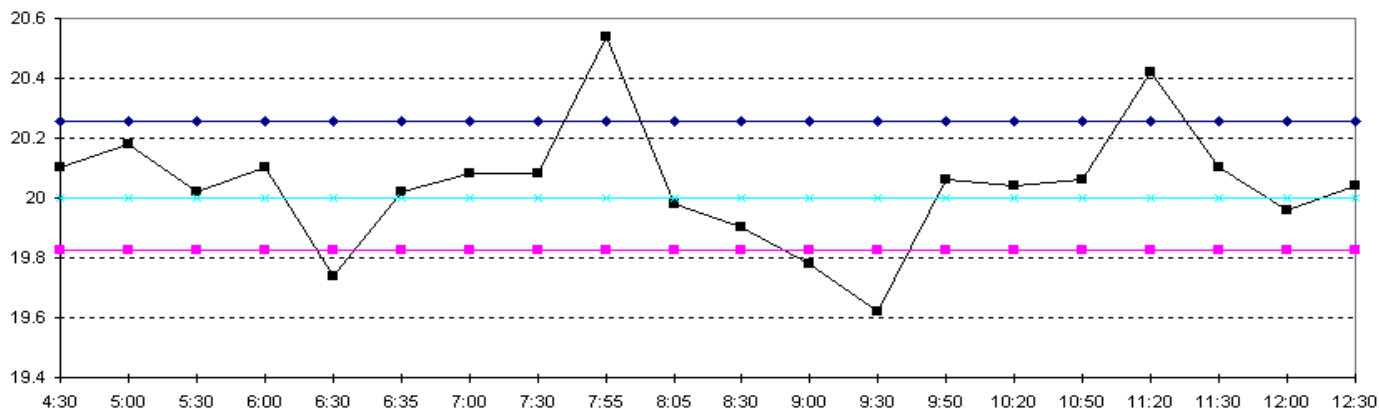
# Exercice 2 : Bombeq

## Suivi statistique par carte X/R

Date	4:30	5:00	5:30	6:00	6:30	6:35	7:00	7:30	7:55	8:05	8:30	9:00	9:30	9:50	10:20	10:50	11:20	11:30	12:00	12:30	
X1	20.1	20	19.9	20.2	19.9	20	20.2	19.9	20.1	19.9	19.8	19.5	19.7	20.1	20	20.3	20.8	20.1	19.8	20	
X2	20.3	20.2	20.3	20	19.5	19.9	20	20.3	20.7	19.9	20	20.1	19.6	19.9	19.9	20	20.2	19.9	19.9	20.1	
X3	20	20.1	20	20	20.1	20.1	20.1	20	20.3	20	19.9	19.8	19.7	20.1	20.2	20	20.5	20.2	19.9	20.1	
X4	19.9	20.4	20.1	20.3	19.7	20	20	20.2	20.7	20.1	19.8	19.7	19.5	20	20.1	20	20	20.1	20	20	
X5	20.2	20.2	19.8	20	19.5	20.1	20.1	20	20.9	20	20	19.8	19.6	20.2	20	20	20.6	20.2	20.2	20	
X6																					
Moyenne	20.10	20.18	20.02	20.10	19.74	20.02	20.08	20.08	20.54	19.98	19.90	19.78	19.62	20.06	20.04	20.06	20.42	20.10	19.96	20.04	
Etendue	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.2	0.2	0.4	0.8	0.2	0.2	0.6	0.2	0.3	0.3	0.3	0.8	0.3	0.4	0.1	
Nombre	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
ddl	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Caractéristique suivie :	poide
Maxi toléré : TS	21.0
Mini toléré : TI	19
Tolérance : IT	2
Valeur nominale	20
Taille échantillon : n	5
Etendue Moyenne	0.375
Moyenne des Moyennes :	20.041
sigma	0.16
d2	2.326
D4	2.114
D3	0
A2	0.577

Carte des moyennes



- ◆ Limite Sup
- Moyenne
- ◆ Limite Inf
- × Cible

Limites moyennes

LSC	20.26
LIC	19.82

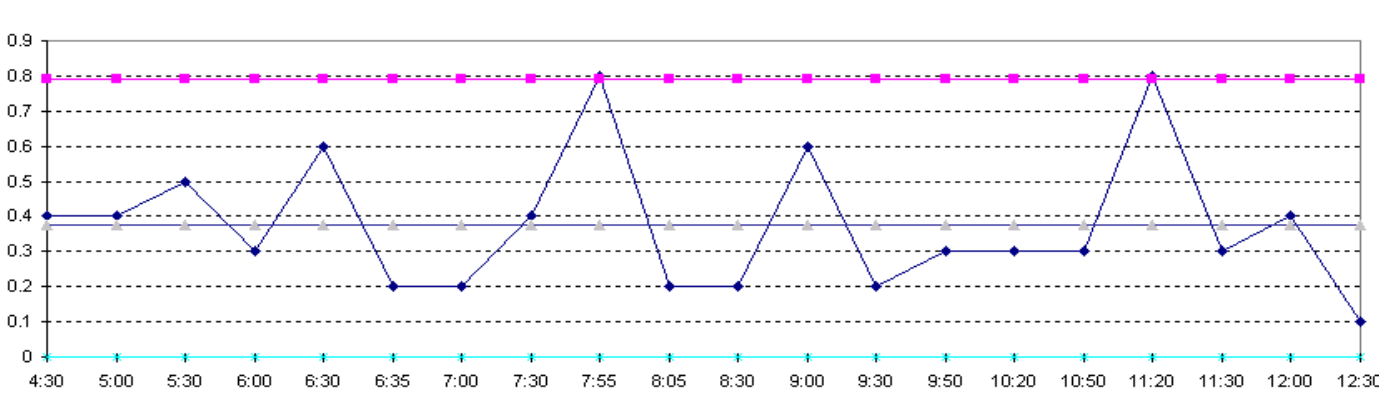
Limites étendues

LSC r	0.79
Lic r	0

Capabilité Process

Cp	2.06756
CpKs	1.98279
CpKi	2.15233

Carte des Etendues



- ◆ Etendue
- ◆ Limite sup
- ◆ Limite inf
- × Cible







- Recenser les points hors limites,
- Identifier les causes spéciales à l'origine des points hors limites,
- Proposer des actions correctives pour éviter la réapparition de ces causes spéciales.

# Exercice 2 : Bombeq

## Journal du processus

Atelier : Ensachage

Ligne : As2

Date	Heures	Descriptif	Action corrective et résultat	Visa
12/12	6h30	Suite prise de poste : nouvel opérateur erreur mesure		
12/12	7h45	Papillon sur rouleaux entrainement : ensachage		
12/12	9h30	Dérive suite à colmatage bec verseur		
12/12	11h15	Changement de lot		
12/12	14h30	Prise de poste nouvelle équipe: ajustage et étalonnage balance		
12/12	16h35	Détéction fuite d'air sur embout de connection		

## Exercice 2 : Bombeq

### Cause spéciales : Actions préventives

Heures	Causes spéciales identifiées	Actions préventives préconisées
6h30	.....	.....

### ➤ Mise à jour des limites

- Éliminer les points hors limites pour lesquels les causes spéciales ont été identifiées,
- Recalculer les limites avec les points restants.

## Exercice 2 : Bombeq

### RÉcalcul des limites de contrôle

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{n} \longrightarrow \bar{\bar{X}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots} =$
$\bar{\bar{R}} = \frac{\sum R}{n} \longrightarrow \bar{\bar{R}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots} =$

$$LSC_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

$$LSC_R = D_4 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

$$LIC_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$

$$LIC_R = D_3 \bar{\bar{R}} = \dots\dots\dots$$





## Exercice 2 : Bombeq

### RÉcalcul des limites de surveillance

$$LSS_x = \bar{x} + \frac{2}{3} A2\bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LSS_x = \dots\dots\dots$$

$$LIS_x = \bar{x} - \frac{2}{3} A2\bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LIS_x = \dots\dots\dots$$

$$LSS_R = D'_4 \bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LSS_R = \dots\dots\dots$$

## Exercice 2 : Bombeq

### REcalcul des limites de surveillance

$$LSS_x = \bar{x} + \frac{2}{3} A2\bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LSS_x = \mathbf{20,14}$$

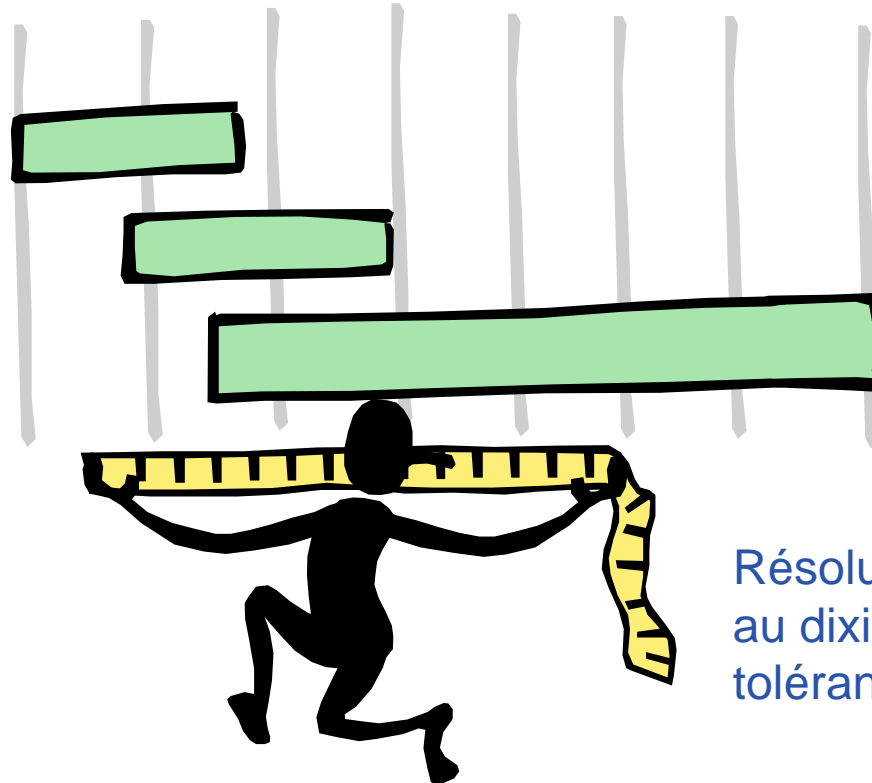
$$LIS_x = \bar{x} - \frac{2}{3} A2\bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LIS_x = \mathbf{19,88}$$

$$LSS_R = D'_4 \bar{R} = \dots\dots\dots$$

$$LSS_R = \mathbf{0,59}$$

# Capabilité du moyen de contrôle : C<sub>mc</sub>



Résolution au moins égale  
au dixième de l'intervalle de  
tolérance

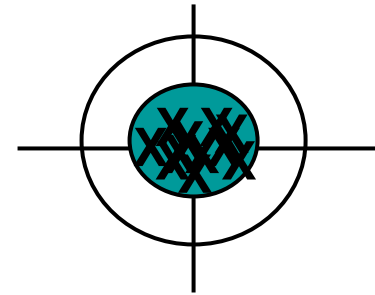
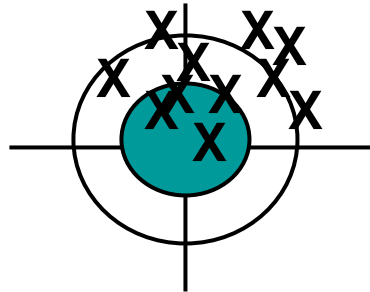
Le moyen de mesure est-il suffisamment exact pour que l'erreur qu'il introduit sur les valeurs soit négligeable ?

- Évaluer la somme des différentes erreurs liées au moyen de mesure
- Avant toute chose, penser à vérifier :
  - la résolution
  - l'erreur de justesse
  - la répétabilité
  - la reproductibilité

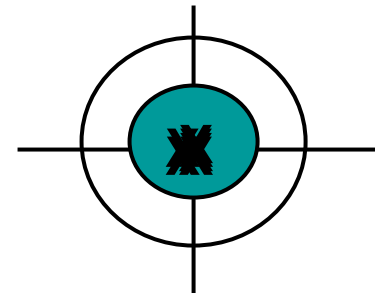
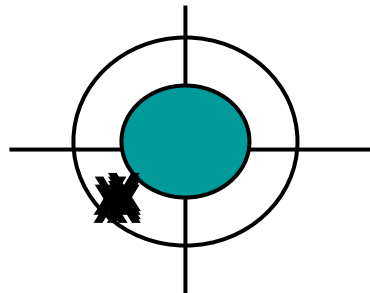
NON JUSTE

JUSTE

NON  
FIDELE



FIDELE  
(Biais)

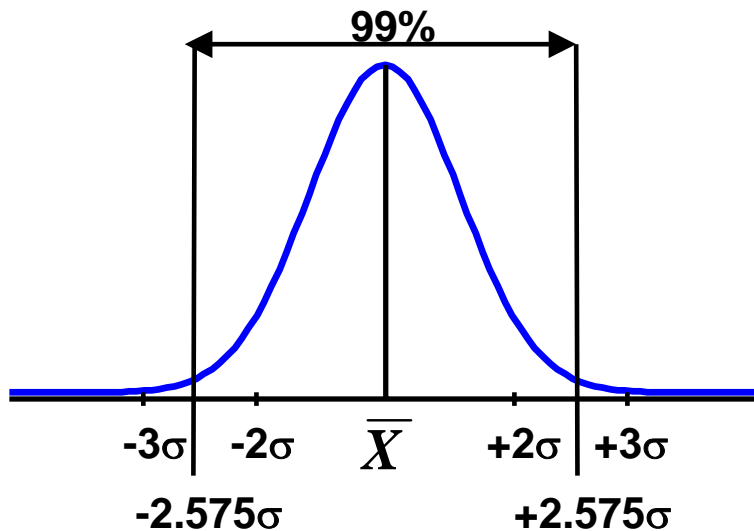


JUSTE ET FIDELE = EXACT

## Définition de « répétabilité »

Aptitude d'un instrument à délivrer des valeurs identiques lorsque la mesure est répétée dans des conditions figées, et sur un court intervalle de temps (même objet soumis à la mesure, même opérateur, même mode opératoire, conditions ambiantes figées ...)

Distribution des valeurs obtenues lors de la répétition des mesures



$\bar{X}$  Moyenne

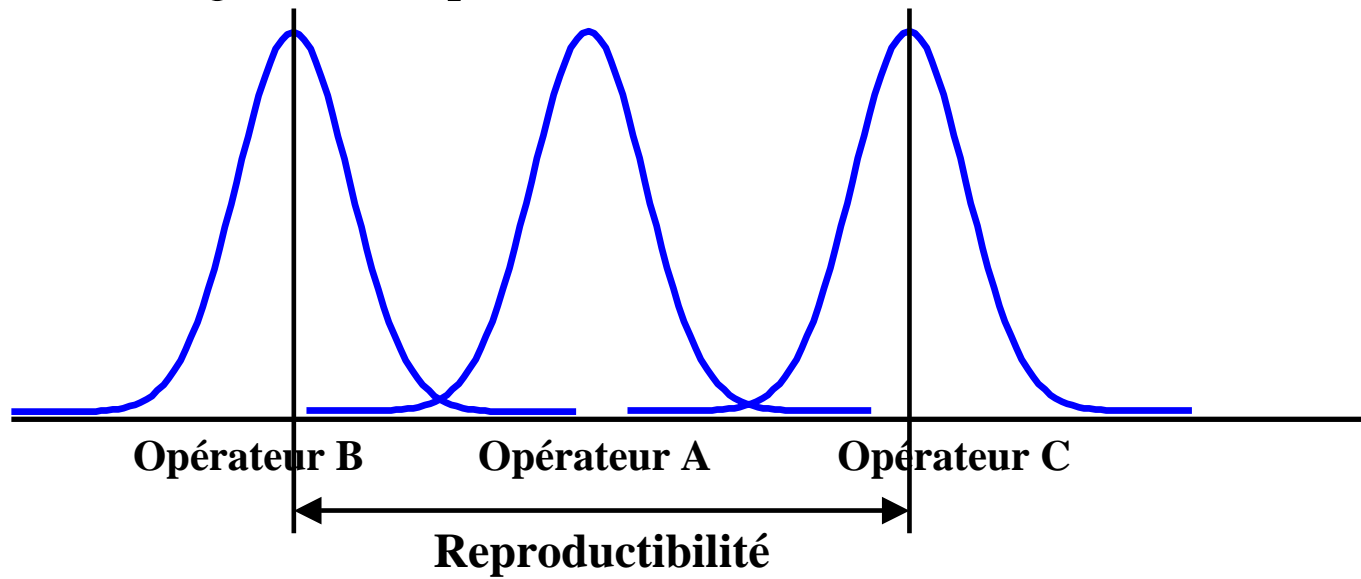
$\sigma_{répét}$  Ecart – type de répétabilité

Incertitude de répétabilité :  
 $\pm 2.575 \cdot \sigma_{répét} = 99\%$  variations

## Définition de « reproductibilité »

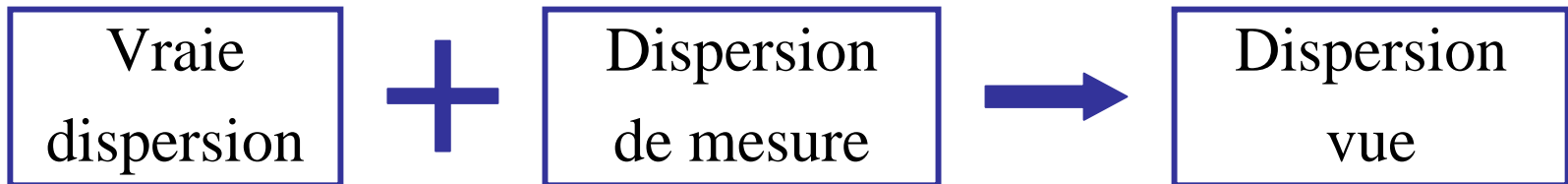
Aptitude d'un instrument à délivrer des valeurs identiques lorsqu'un ou plusieurs paramètres externes au moyen évoluent

NB: Les constructeurs automobiles privilégient, en tant que paramètre externe, le changement d'opérateur



La variance observée ( $\sigma^2$ ) est la somme de la vraie variance ( $\sigma^2_{\text{vraie}}$ ) et de la variance de l'instrument ( $\sigma^2_{\text{inst}}$ )

$$Cp_{\text{vraie}} = \frac{Cp_{\text{observé}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{Cp_{\text{observé}}}{Cmc}\right)^2}}$$





## Résultats

	<u>Conclusion</u>	<u>Action</u>
$C_{mc} < 2.5$	Le moyen de mesure n'est pas adapté	Rejeter l'instrument de mesure
$2.5 < C_{mc} < 3$	Le moyen de mesure n'est pas adapté	Améliorer le système ou former les opérateurs
$3 < C_{mc} < 4$	Le moyen de mesure est adapté à des tolérances plus serrées	Rechercher un autre système de contrôle
$C_{mc} > 4$ ou %Gage < 25%	Le moyen de mesure est capable	-

**La méthode R&R provient de Charbonneau. Il en existe deux :**

## R&R Rapide

Outil de vérification  
rapide du Cmc

## R&R Complète

Outil de vérification complet  
pour le suivi du Cmc (idéal  
pour le contrôle d'un nouvel  
instrument de mesure)

Pièce	OP1	OP2	R
1	18.52	18.53	0.01
2	18.53	18.53	0
3	18.49	18.51	0.02
4	18.53	18.53	0
5	18.5	18.49	0.01
6	18.48	18.5	0.02
7	18.49	18.49	0
8	18.51	18.5	0.01
9	18.51	18.49	0.02
10	18.52	18.51	0.01
	Moyenne des étendues		0.01

Diamètre 18.50 mm  $\pm$  0.04

Validité des mesures

$$LSC_{\bar{R}} = D_4 \cdot \bar{R} = 3.267 \times 0.01 = 0.03267$$

Calcul de  $\sigma_{instrument}$

$$\sigma_{instrument} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.01}{1.128} = 0.008865$$

Calcul de la dispersion

$$Dispersion = 6 \times \sigma_{instrument} = 0.05319$$

Calcul du Cmc

$$Cmc = \frac{IT}{Dispersion} = 1.504$$

**Conclusion : l'instrument de mesure n'est pas capable**

## Principe

- 3 opérateurs différents (notés OP1, OP2 et OP3),
- 10 pièces différentes,
- chaque opérateur effectue **deux** mesures ( $M_1$  et  $M_2$ ) sur chaque pièce

### 1. Validité des mesures

Vérifier que  $LSC_{\bar{R}}$  est supérieure à toutes les étendues de mesures ( $D_4$  est pris avec  $n =$  taille de l'échantillon, ici 2) ←

### 2. Evaluation de l'incertitude de répétabilité

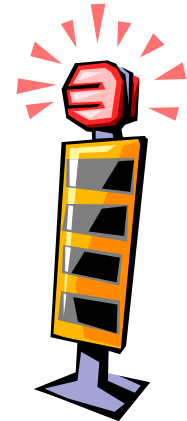
$$\sigma_{\text{répétabilité}} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

### 3. Evaluation de l'incertitude de reproductibilité

$$\sigma_{\text{opérateurs}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{2}}$$

$$\sigma_{\text{reproductibilité}} = \sqrt{\sigma_{\text{opérateurs}}^2 - \frac{\sigma_{\text{répétabilité}}^2}{n.r}}$$

$n$  : nombre de pièces mesurées  
 $r$  : nombre de mesure par opérateur



## 4. Dispersion de l'instrument de mesure

$$\sigma^2_{instrument} = \sigma^2_{reproductibilité} + \sigma^2_{répétabilité}$$

## 5. Capabilité de l'instrument de mesure et du %GAGE

$$Cmc = \frac{IT}{Dispersion} = \frac{IT}{6 \cdot \sigma_{instrument}}$$

$$\%GAGE = \frac{Dispersion}{IT} \times 100$$

# Relation entre $C_{pk}$ et % de produit non conforme

Il existe une relation entre la loi normale centrée réduite, la loi normale représentative du procédé et le pourcentage de produits non-conformes fabriqués

$X$  suit une loi  $N(m, \sigma)$

$Y$  suit une loi  $N(0, 1)$

$$P(X \geq T_s) = P(X \geq m + 3\sigma \cdot C_{pks})$$

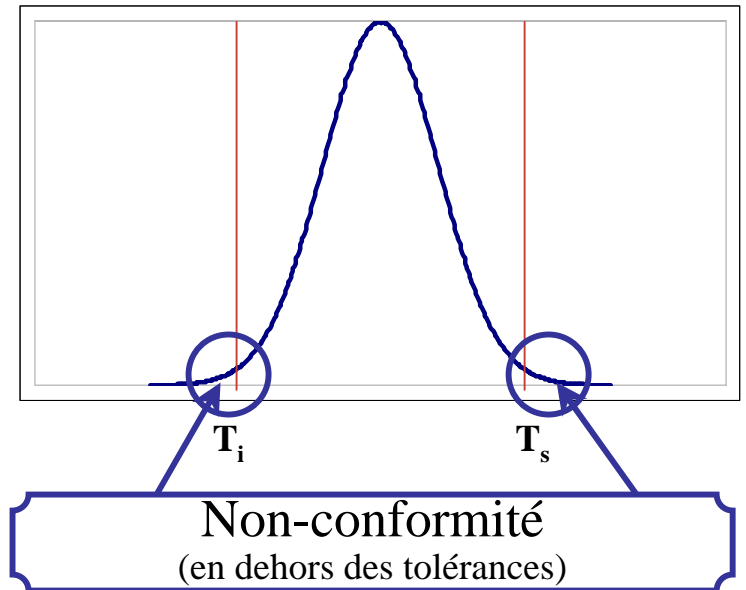
$$P(X \geq T_s) = P(Y \geq 3 \cdot C_{pks}) \quad (\text{centrage + réduction})$$

$$P(X \leq T_i) = P(X \leq m - 3\sigma \cdot C_{pki})$$

$$P(X \leq T_i) = P(Y \leq -3 \cdot C_{pki}) \quad (\text{centrage + réduction})$$

Avec  $Z_u = 3 \cdot C_{pks}$  et  $Z_l = -3 \cdot C_{pki}$  :

Donc %Non-conforme =  $P(Y \geq Z_u) + P(Y \leq Z_l)$ , valeurs à lire dans la table  $N(0,1)$



## Exemples

$$C_{pki} = 1.30 \quad C_{pks} = 0.90$$

$$\% \text{ Non-conforme} = P(Y \geq 2.7) + P(Y \leq -3.9)$$

Cf. la table de la loi  $N(0,1)$  :

$$P(Y \geq 2.7) = 0.0035$$

$$P(Y \leq -3.9) = 0.000048$$

Conclusion : % Non-conforme = 0.003548,

soit **0.3548 %**

$$C_{pki} = 1.15 \quad C_{pks} = 1.33$$

$$\% \text{ Non-conforme} = P(Y \geq 3.99) + P(Y \leq -3.45)$$

Cf. la table de la loi  $N(0,1)$  :

$$P(Y \geq 3.99) = 0.000033$$

$$P(Y \leq -3.45) = 0.00028$$

Conclusion : % Non-conforme = 0.000313,

soit **313 ppm**



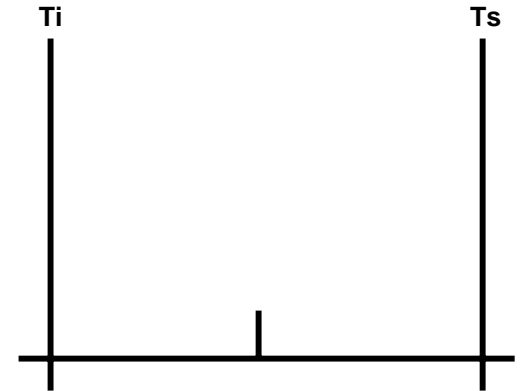
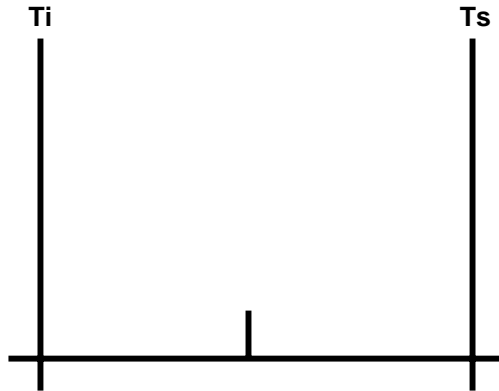
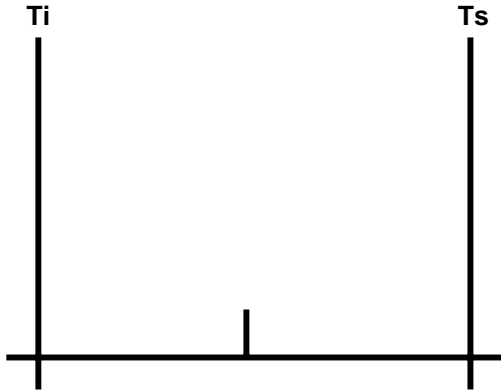
# EXERCICE 4

## % Conforme et % Non Conforme

Les capacités des processus mesurées dans un atelier ont permis de recenser les résultats suivants:

Série	$C_p$	$C_{pks}$
1	0,8	-0,1
2	1,1	0
3	1,15	1,15
4	1,4	1,15
5	1,4	1,35
6	1,32	1,41

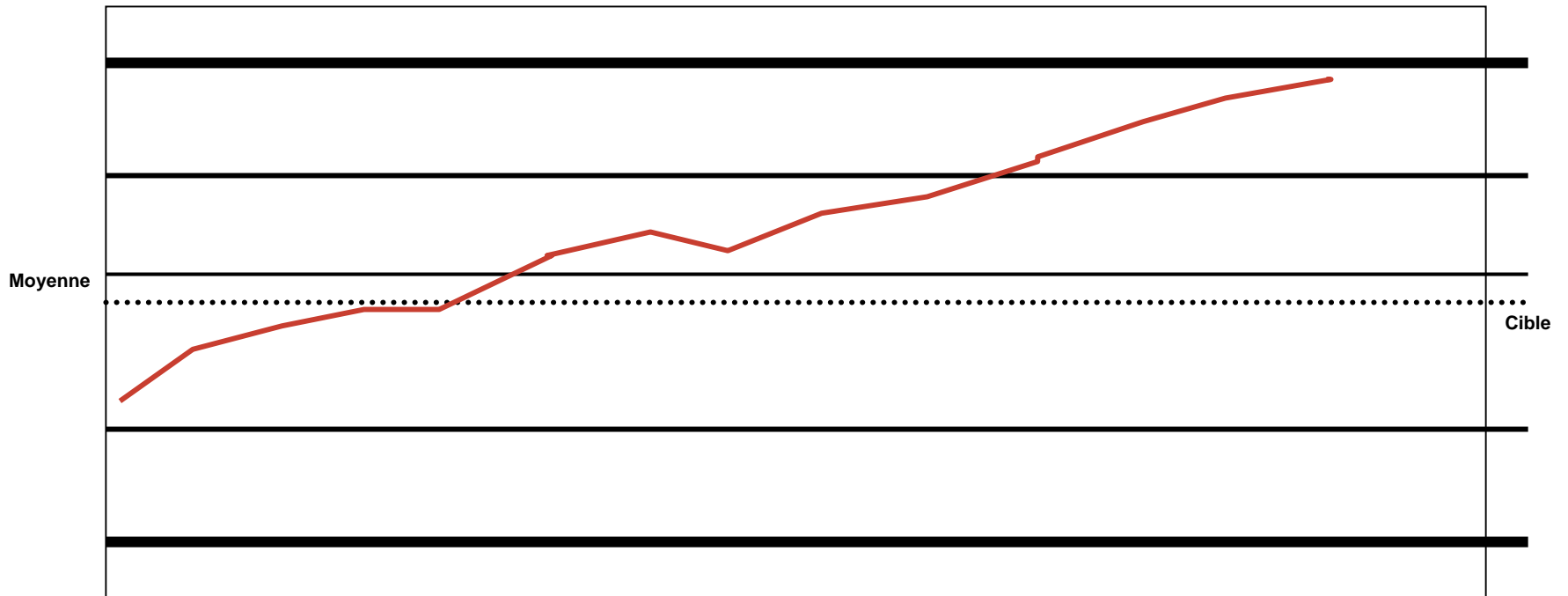
1. Représenter graphiquement (loi normale)  $C_p$  et  $C_{pk}$  pour les 6 séries
2. Calculer le pourcentage de non conforme

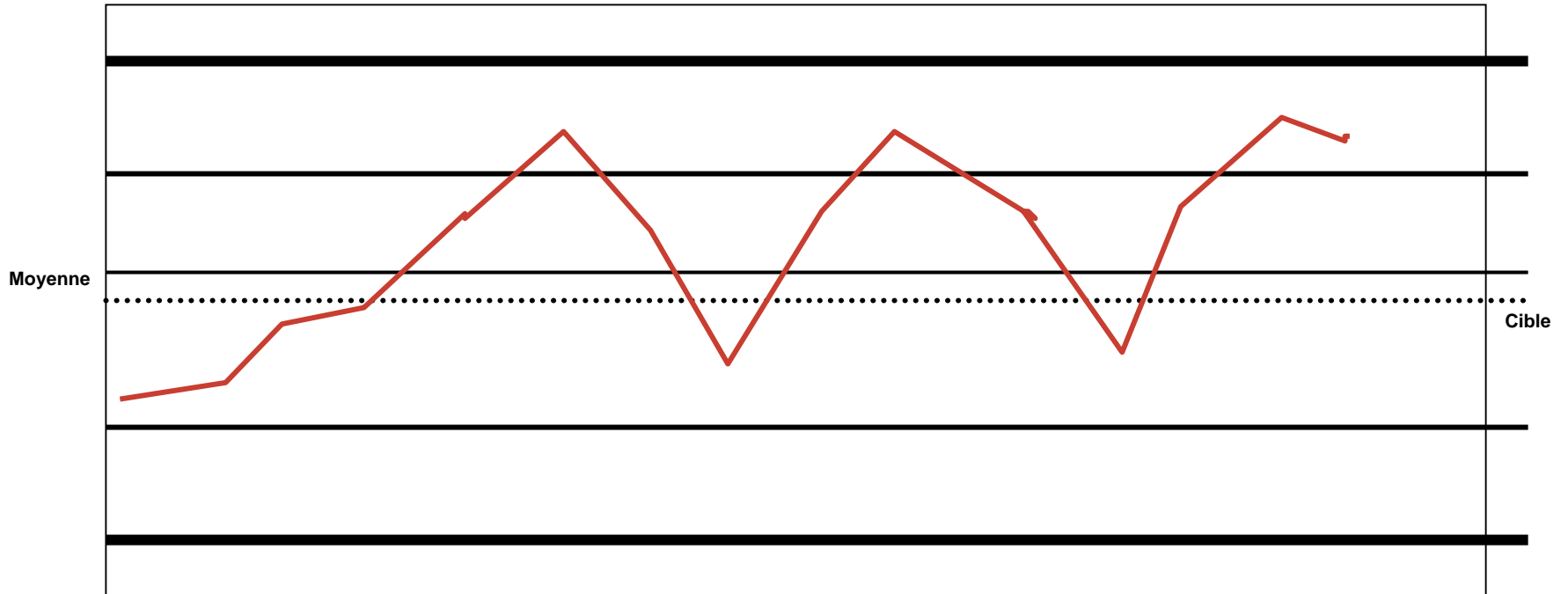


↗ Série n°1	$C_{pks} = -0.1$ $C_p = 0.8$	NC pour Ts = 61.79% NC pour Ti = 0 ppm	NC total = 61.79%
↗ Série n°2	$C_{pks} = 0$ $C_p = 1.1$	NC pour Ts = 50% NC pour Ti = 0 ppm	NC total = 50%
↗ Série n°3	$C_{pks} = 1.15$ $C_p = 1.15$	NC pour Ts = 280 ppm NC pour Ti = 280 ppm	NC total = 560 ppm (0.056%)
↗ Série n°4	$C_{pks} = 1.15$ $C_p = 1.4$	NC pour Ts = 280 ppm NC pour Ti = 1 ppm	NC total = 281 ppm (0.0281%)
↗ Série n°5	$C_{pks} = 1.35$ $C_p = 1.4$	NC pour Ts = 26 ppm NC pour Ti = 7 ppm	NC total = 33 ppm (0.0033%)
↗ Série n°6	$C_{pks} = 1.41$ $C_p = 1.32$	NC pour Ts = 12 ppm NC pour Ti = 112 ppm	NC total = 124 ppm (0.0124%)

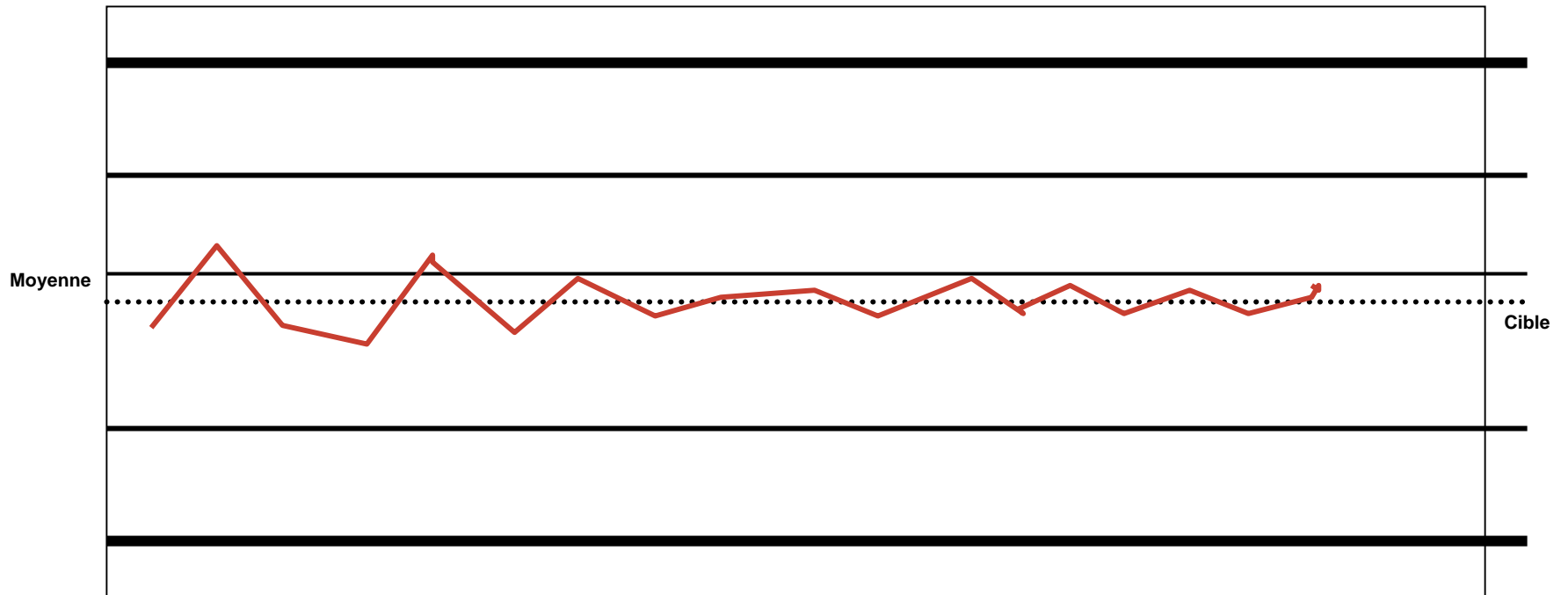
# Analyse des cartes en différé

- Tout le monde a son rôle à jouer dans le SPC.
- Prendre un peu de recul permet de mettre en évidence :
  - Les phénomènes de tendances.
    - Dérives, évolutions cycliques, décentrage, diminution de la dispersion
  - Les répartitions non normales.
  - Les causes spéciales à effet modéré.



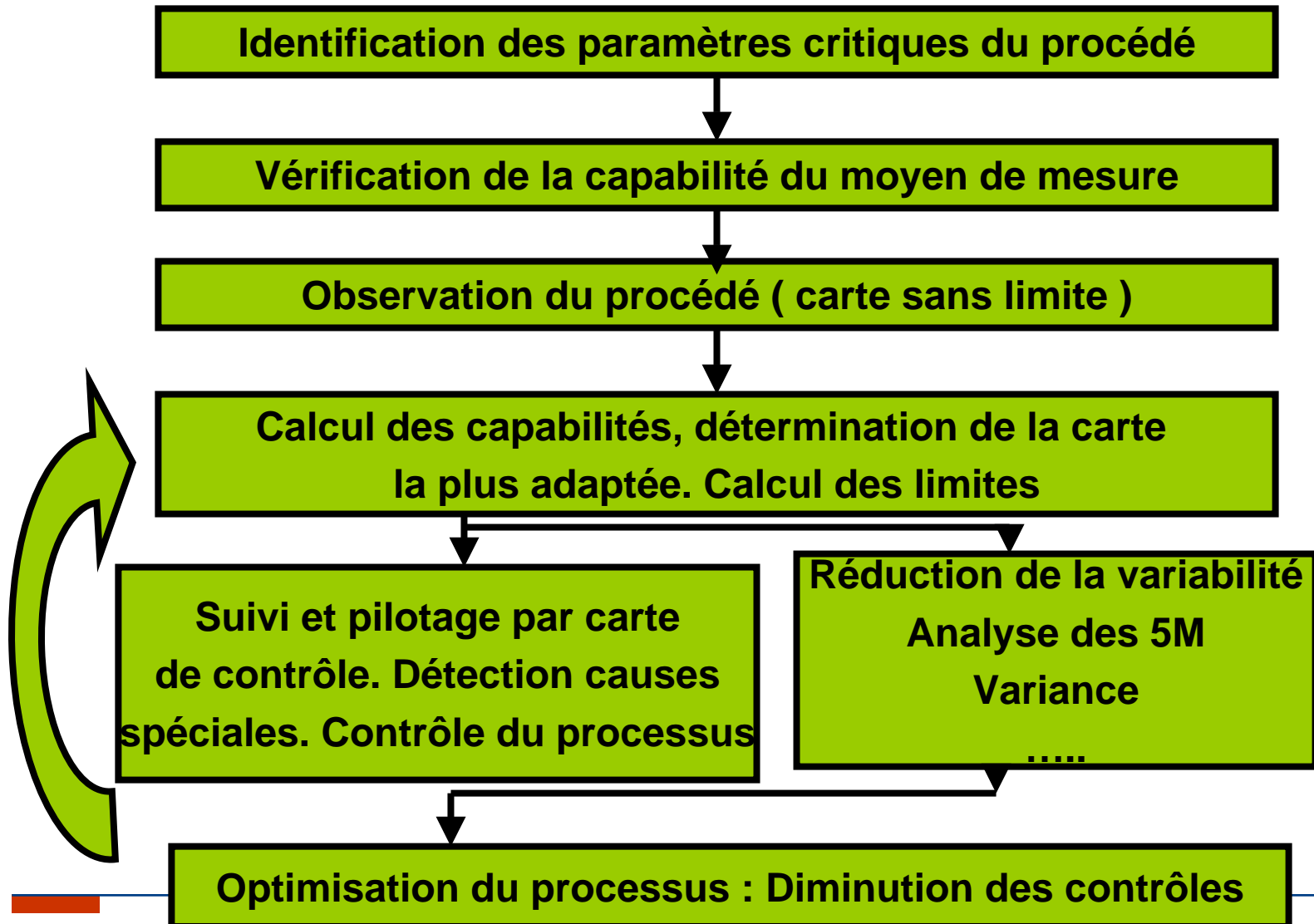






# RESUME

# Mise en place des cartes de contrôle



➤ Le SPC possède des intérêts puissants qui sont la maîtrise de la production et du procédé de fabrication, un passage de la détection à la prévention des défauts, l'association et la mobilisation du personnel, enfin une méthodologie rigoureuse.

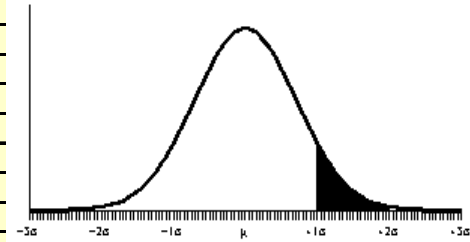


# Annexes

# Table loi Normale



u	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4841	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4091	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2644	0.2611	0.2579	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2207	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1	0.1587	0.1563	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1094	0.1075	0.1057	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0070	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000



## Tableau des coefficients

n	Estimation de $\sigma$			Pour le calcul de la carte $\bar{X}$			Carte Médiane		Pour le calcul de la carte des S				Pour le calcul de la carte des R			
	$c_4$	$d_2$	$d_3$	A	$A_2$	$A_3$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_6$
2	0,7979	1,128	0,853	2,121	1,880	2,659	1,880	2,121	-	3,267	-	2,606	-	3,267	-	3,686
3	0,8862	1,693	0,888	1,732	1,023	1,954	1,187	2,010	-	2,568	-	2,276	-	2,574	-	4,358
4	0,9213	2,059	0,880	1,500	0,729	1,628	0,796	1,639	-	2,266	-	2,088	-	2,282	-	4,698
5	0,9400	2,326	0,864	1,342	0,577	1,427	0,691	1,607	-	2,089	-	1,964	-	2,114	-	4,918
6	0,9515	2,534	0,848	1,225	0,483	1,287	0,548	1,389	0,030	1,970	0,029	1,874	-	2,004	-	5,078
7	0,9594	2,704	0,833	1,134	0,419	1,182	0,508	1,374	0,118	1,882	0,113	1,806	0,076	1,924	0,205	5,203
8	0,9650	2,847	0,820	1,061	0,373	1,099	0,433	1,233	0,185	1,815	0,178	1,752	0,136	1,864	0,387	5,307
9	0,9693	2,970	0,808	1,000	0,337	1,032	0,412	1,224	0,239	1,761	0,232	1,707	0,184	1,816	0,546	5,394
10	0,9727	3,078	0,797	0,949	0,308	0,975	0,362	1,114	0,284	1,716	0,277	1,669	0,223	1,777	0,687	5,469
11	0,9754	3,173	0,787	0,905	0,285	0,927			0,321	1,679	0,314	1,637	0,256	1,744	0,812	5,534
12	0,9776	3,258	0,778	0,866	0,266	0,886			0,354	1,646	0,346	1,609	0,283	1,717	0,924	5,592
13	0,9794	3,336	0,770	0,832	0,249	0,850			0,382	1,618	0,374	1,585	0,307	1,693	1,026	5,646
14	0,9810	3,407	0,762	0,802	0,235	0,817			0,406	1,594	0,399	1,563	0,328	1,672	1,121	5,693
15	0,9823	3,472	0,755	0,775	0,223	0,789			0,428	1,572	0,420	1,544	0,347	1,653	1,207	5,937
20	0,9869	3,735	0,729	0,671	0,180	0,680			0,510	1,490	0,503	1,471	0,415	1,585	1,548	5,922

Coefficient  $d_2^*$  pour l'estimation de  $\sigma$  à partir de  $\bar{R}$

Nb de mesures	Nombre de sous-groupes = Nombre de pièces x Nombre d'opérateurs															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	>15
2	1,414	1,279	1,231	1,206	1,191	1,181	1,173	1,168	1,163	1,160	1,157	1,154	1,153	1,151	1,149	1,128
3	1,912	1,806	1,769	1,750	1,739	1,731	1,726	1,722	1,719	1,716	1,714	1,712	1,711	1,710	1,708	1,693
4	2,239	2,151	2,121	2,105	2,096	2,090	2,086	2,082	2,08	2,078	2,076	2,075	2,073	2,072	2,071	2,071
5	2,481	2,405	2,379	2,366	2,358	2,353	2,349	2,346	2,344	2,342	2,34	2,339	2,338	2,337	2,337	2,326



Tailles des Échantillons : n	Carte de contrôle de la moyenne		Carte de contrôle de l'étendue			
	A2 LCS	A3	D3 LCI	D4 LCS	D'3 LSI	D'4 LSS
2	1.88	2.659	0	3.27	0	2.51
3	1.02	1.954	0	2.57	0	2.05
4	0.73	1.628	0	2.28	0.15	1.85
5	0.58	1.427	0	2.11	0.26	1.74
6	0.48	1.287	0	2.00	0.33	1.67
7	0.42	1.182	0.08	1.93	0.38	1.62
8	0.37	1.099	0.14	1.86	0.42	1.58
9	0.34	1.032	0.18	1.82	0.46	1.54
10	0.31	0.975	0.22	1.78	0.48	1.52